

# 5

## SISTEMAS NO LINEALES

En este capítulo estudiaremos los sistemas no lineales autónomos. En el capítulo 3 vimos que, usando una combinación de procedimientos analíticos y geométricos, podemos entender los sistemas lineales completamente. Aquí combinamos esos métodos lineales con algunas técnicas cualitativas adicionales para abordar los sistemas no lineales. Si bien esos procedimientos no nos permiten determinar los retratos fase de todos los sistemas no lineales, sí podremos tratar algunos sistemas no lineales importantes.

Primero mostraremos cómo puede aproximarse un sistema no lineal a un punto de equilibrio por medio de un sistema lineal. Este proceso, conocido como “linearización”, es uno de los procedimientos que se aplican con mayor frecuencia. Estudiando la aproximación lineal, podemos predecir el comportamiento de las soluciones del sistema no lineal, por lo menos cerca del punto de equilibrio.

Luego expondremos un método cualitativo con el que se puede obtener más información de un campo de direcciones, solamente observando en qué punto de éste una componente es cero (es decir, dónde es vertical u horizontal el campo), obtenemos las curvas llamadas “nulclinales”, que subdividen el espacio fase. Cuando estas curvas se combinan con la linearización de los puntos de equilibrio, en algunos casos pueden dar una descripción completa de los comportamientos posibles a largo plazo de las soluciones.

En el resto del capítulo estudiaremos algunos tipos especiales de modelos y sus sistemas no lineales. Estos últimos son importantes porque surgen de aplicaciones y porque los procedimientos implicados en sus análisis son muy entretenidos.

## 5.1 ANÁLISIS DEL PUNTO DE EQUILIBRIO

Como resultado de nuestro estudio en el capítulo 3, ahora podemos entender las soluciones de los sistemas lineales, tanto cualitativa como cuantitativamente. Sin embargo, por lo general los sistemas no lineales se prestan menos a los procedimientos analíticos y algebraicos que hemos desarrollado, pero podemos usar las matemáticas de los sistemas lineales para entender el comportamiento de las soluciones de los sistemas no lineales cerca de sus puntos de equilibrio.

### La ecuación de Van der Pol

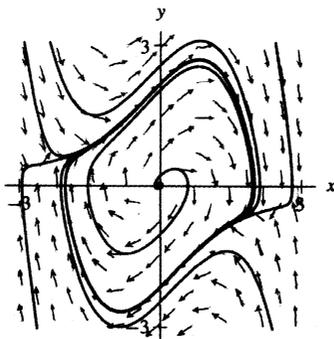
Para ilustrar cómo analizar el comportamiento de soluciones cerca de un punto de equilibrio, comenzamos con un sistema no lineal simple pero importante: el sistema Van der Pol, que estudiamos numéricamente en la sección 2.4 (p. 187). Recuerde que este sistema es

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -x + (1 - x^2)y.\end{aligned}$$

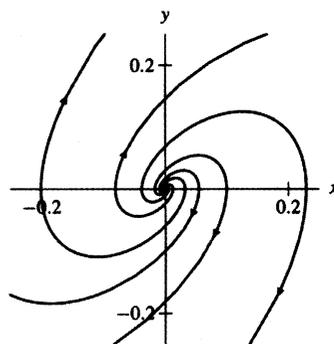
Su campo de direcciones y plano fase se muestran en la figura 5.1.

El único punto de equilibrio de este sistema es el origen, por lo que examinaremos cómo se comportan las soluciones cerca del origen. El campo de direcciones muestra que las soluciones se mueven alrededor del origen, y si trazamos las aproximaciones numéricas de éstas cerca de ese punto vemos una gráfica que nos recuerda una fuente espiral (vea la figura 5.2).

Podemos entender por qué las soluciones se mueven alejándose en espiral desde el origen, aproximando el sistema Van der Pol con otro que sea mucho más fácil de analizar. Aunque el sistema no es lineal, contiene sólo un término no lineal,  $x^2y$ , en la ecuación para  $dy/dt$ . Si  $x$  y  $y$  son pequeñas, entonces este término es mucho más pequeño que cualquiera de los otros en la ecuación. Por ejemplo, si  $x$  y  $y$  son iguales a 0.1, entonces el término  $x^2y$  es igual a 0.001, que es considerablemente menor que  $x$  o  $y$ . Si  $x$  y  $y$  son iguales a 0.01,



**Figura 5.1**  
Campo de direcciones y plano fase para el sistema Van der Pol.



**Figura 5.2**  
Plano fase para el sistema Van der Pol cerca del origen.

entonces  $x^2y = 10^{-6}$ , que de nuevo es mucho menor que  $x$  o  $y$ . Tal vez podemos aproximar el sistema Van der Pol por otro en el que simplemente despreciemos el término  $x^2y$ , por lo menos si  $x$  y  $y$  están cercanas a 0. Si cancelamos este término del sistema, nos queda

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -x + y,\end{aligned}$$

que es un sistema lineal. En consecuencia, son aplicables los procedimientos del capítulo 3. Los eigenvalores del sistema lineal son  $(1 \pm \sqrt{3}i)/2$ , y como son complejos con una parte real que es positiva, sabemos que las soluciones del sistema lineal se mueven en espiral alejándose desde el origen.

El sistema lineal y el sistema Van der Pol tienen campos vectoriales que están muy cercanos entre sí cerca del punto de equilibrio en el origen. Como las soluciones del sistema lineal se mueven en espiral alejándose del origen, no debe sorprendernos que las soluciones del sistema Van der Pol que se inicien cerca del origen también se alejen en espiral.

El procedimiento que aplicamos arriba se llama **linearización**. Cerca del punto de equilibrio, aproximamos el sistema no lineal por medio de un sistema lineal apropiado. Para condiciones iniciales cerca del punto de equilibrio, las soluciones del sistema no lineal y de la aproximación lineal permanecen cercanas entre sí por lo menos en algún intervalo.

## Un modelo de especies en competencia

Sean  $x$  y  $y$  las poblaciones de dos especies que compiten por recursos. Un incremento en cualquier especie tiene un efecto adverso sobre la razón de crecimiento de la otra. Un ejemplo de un modelo de este tipo de sistema es

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 2x \left(1 - \frac{x}{2}\right) - xy \\ \frac{dy}{dt} &= 3y \left(1 - \frac{y}{3}\right) - 2xy.\end{aligned}$$

Aunque los términos contenidos en esas ecuaciones se basan en hipótesis razonables, escogemos coeficientes que simplifiquen nuestro análisis en vez de modelar alguna especie particular.

Observe que para un valor dado de  $x$ , si  $y$  se incrementa entonces el término  $-xy$  ocasiona que  $dx/dt$  decrezca. De modo similar, para un valor dado de  $y$ , si  $x$  crece entonces  $-2xy$  provoca que  $dy/dt$  disminuya. Un aumento en la población de cualquiera de las especies ocasiona una disminución en la razón de crecimiento de la otra.

### Análisis cualitativo

Empezaremos nuestro análisis de este sistema tomando en cuenta que si  $y = 0$ , tenemos  $dy/dt = 0$ . En otras palabras, si las  $y$  están extintas, así permanecerán por un tiempo indefinido. Si  $y = 0$ ,

$$\frac{dx}{dt} = 2x \left(1 - \frac{x}{2}\right),$$

que es un modelo logístico de población con una capacidad de soporte de 2. La línea fase de esta ecuación concuerda con el eje  $x$  del plano fase. En particular  $(0, 0)$  y  $(2, 0)$  son puntos de equilibrio del sistema. Del mismo modo, si  $x = 0$ , tenemos  $dx/dt = 0$ , por lo que la línea fase de

$$\frac{dy}{dt} = 3y \left(1 - \frac{y}{3}\right)$$

coincide con el eje  $y$  del plano fase del sistema y  $(0, 3)$  es otro punto de equilibrio.

Por el teorema de unicidad, las soluciones con condiciones iniciales en el primer cuadrante deben permanecer en esa región para siempre. Es decir, los ejes coinciden con curvas solución y el teorema de unicidad garantiza que las soluciones no pueden cruzarlos. Como este modelo se refiere a poblaciones, y si el crecimiento negativo para éstas no tiene sentido, limitaremos nuestra atención a soluciones contenidas sólo en el primer cuadrante.

Encontramos los puntos de equilibrio despejando  $x$  y  $y$  en el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x \left(1 - \frac{x}{2}\right) - xy = 0 \\ 3y \left(1 - \frac{y}{3}\right) - 2xy = 0, \end{cases}$$

que puede reescribirse en la forma

$$\begin{cases} x(2 - x - y) = 0 \\ y(3 - y - 2x) = 0. \end{cases}$$

La primera ecuación se satisface si  $x = 0$  o si  $2 - x - y = 0$ , y la segunda se cumple si  $y = 0$  o si  $3 - y - 2x = 0$ .

Supongamos primero que  $x = 0$ . Entonces la ecuación  $y = 0$  da un punto de equilibrio en el origen y  $3 - y - 2x = 0$  y lo proporciona en  $(0, 3)$ .

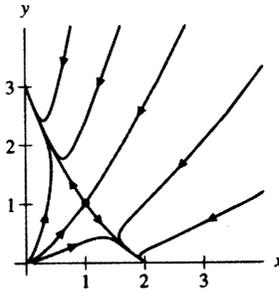
Digamos ahora que  $2 - x - y = 0$ . Entonces la ecuación  $y = 0$  da un punto de equilibrio en  $(2, 0)$  y  $3 - y - 2x = 0$  lo da en  $(1, 1)$ . (Resuelva las ecuaciones simultáneas  $2 - x - y = 0$  y  $3 - y - 2x = 0$ .) Por tanto, los puntos de equilibrio son  $(0, 0)$ ,  $(0, 3)$ ,  $(2, 0)$  y  $(1, 1)$ .

### Linearización de este sistema alrededor de $(1, 1)$

El punto de equilibrio  $(1, 1)$  es de particular interés. Su existencia indica que es posible para esas dos especies coexistir en equilibrio. Si calculamos numéricamente el plano fase para este sistema (vea la figura 5.3), las soluciones parecen tener sólo tres tipos diferentes de comportamientos a largo plazo. Unas soluciones tienden a  $(2, 0)$ , algunas más a  $(0, 3)$  y otras a  $(1, 1)$ .

Quedan dos preguntas importantes. Primero, ¿qué soluciones tienden al punto de equilibrio  $(1, 1)$ ? En particular, ¿es suficientemente grande el conjunto de esas soluciones para que esperemos encontrar el ejemplo de una solución como ésta en la naturaleza? Segundo, ¿qué es lo que divide a las condiciones iniciales que dan soluciones en las que  $x$  tiende a cero de aquellas donde  $y$  tiende a cero? Para responderlas, estudiamos el sistema cerca del punto de equilibrio  $(1, 1)$  usando la linearización.

Los sistemas lineales siempre tienen un punto de equilibrio en el origen. Por tanto, el primer paso al comparar el sistema no lineal cerca del punto de equilibrio  $(1, 1)$  con uno

**Figura 5.3**

Plano fase para el sistema

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 2x \left(1 - \frac{x}{2}\right) - xy \\ \frac{dy}{dt} &= 3y \left(1 - \frac{y}{3}\right) - 2xy.\end{aligned}$$

lineal es mover ese punto al origen por medio de un cambio de variables. Una vez que lo hemos reubicado, podemos usar las mismas ideas que en el caso del ejemplo Van der Pol para identificar la aproximación lineal.

Para mover el punto de equilibrio al origen, introducimos dos nuevas variables,  $u$  y  $v$ , mediante las fórmulas  $u = x - 1$  y  $v = y - 1$ . Note que  $u$  y  $v$  están cerca de 0 cuando  $(x, y)$  está cerca de  $(1, 1)$ . Para obtener el sistema en las nuevas variables, calculamos primero

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= \frac{d(x-1)}{dt} = \frac{dx}{dt} \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{d(y-1)}{dt} = \frac{dy}{dt}.\end{aligned}$$

Los lados derechos del sistema en las nuevas variables están dados por

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 2x \left(1 - \frac{x}{2}\right) - xy \\ &= 2(u+1) \left(1 - \frac{u+1}{2}\right) - (u+1)(v+1) \\ &= -u - v - u^2 - uv,\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= 3y \left(1 - \frac{y}{3}\right) - 2xy \\ &= 3(v+1) \left(1 - \frac{v+1}{3}\right) - 2(u+1)(v+1) \\ &= -2u - v - 2uv - v^2.\end{aligned}$$

En términos de las nuevas variables, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= -u - v - u^2 - uv \\ \frac{dv}{dt} &= -2u - v - 2uv - v^2.\end{aligned}$$

Como esperábamos, el origen es un punto de equilibrio para este sistema. La expresión para  $du/dt$  contiene los términos  $-u$  y  $-v$  y los términos no lineales  $-u^2$  y  $-uv$ . Para

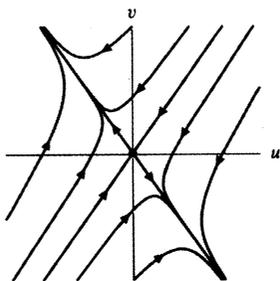
$dv/dt$ , los términos lineales son  $-2u$  y  $-v$ , y los no lineales son  $-2uv$  y  $-v^2$ . Cerca del origen, los términos no lineales son mucho más pequeños que los lineales y, por lo tanto podemos aproximar el sistema no lineal cerca de  $(u, v) = (0, 0)$  con el lineal

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= -u - v \\ \frac{dv}{dt} &= -2u - v.\end{aligned}$$

Los eigenvalores de este sistema son  $-1 \pm \sqrt{2}$ . Uno de esos números es positivo y el otro es negativo, por lo que  $(u, v) = (0, 0)$  es un punto silla para el sistema lineal (vea la figura 5.4). Como los sistemas lineal y no lineal son aproximadamente iguales, esperamos que el plano fase para el sistema no lineal cerca del punto de equilibrio  $(x, y) = (1, 1)$  se vea como el plano  $uv$  del sistema lineal.

Concluimos que sólo hay dos curvas de soluciones en el plano  $x$ - $y$  que tienden hacia el punto de equilibrio  $(1, 1)$  cuando  $t$  crece. Por consiguiente, las soluciones cercanas a  $(1, 1)$  forman un conjunto muy pequeño. Aun si las condiciones iniciales se escogen exactamente sobre algunas de estas curvas, perturbaciones arbitrariamente pequeñas pueden empujar a dichas condiciones iniciales hacia uno u otro lado. Como nuestro modelo es sólo una versión muy simplificada de la dinámica de las poblaciones, que deja fuera innumerables fuentes de tales perturbaciones, no esperamos ver soluciones que conduzcan al punto de equilibrio  $(1, 1)$  en la naturaleza.

Por otra parte, las curvas soluciones que tienden a  $(1, 1)$  juegan un papel importante en el estudio de este sistema. Viendo el plano fase, notamos que una de estas curvas divide el primer cuadrante en dos regiones. En una región sobrevive una especie y en la otra sobrevive la otra población (vea la figura 5.3).



**Figura 5.4**  
Plano fase para

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= -u - v \\ \frac{dv}{dt} &= -2u - v,\end{aligned}$$

la aproximación lineal del sistema en competencia cerca de  $(x, y) = (1, 1)$ , que es el mismo punto que  $(u, v) = (0, 0)$ .

## Un ejemplo no polinomial

Los dos ejemplos anteriores tienen campos vectoriales que son polinomios. Cuando el campo vectorial es un polinomio y el punto de equilibrio en consideración es el origen, es muy fácil identificar qué términos son lineales y cuáles no lo son. Pero no todos los campos vectoriales son dados por polinomios.

Considere el sistema

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -y - \operatorname{sen} x.\end{aligned}$$

Este sistema es un modelo para el movimiento de un péndulo amortiguado que estudiaremos extensamente en las secciones 5.3 y 5.4. Los puntos de equilibrio de este sistema ocurren en los puntos  $(x, y) = (0, 0), (\pm\pi, 0), (\pm 2\pi, 0)$ , etc. Supongamos que queremos estudiar las soluciones cercanas al punto de equilibrio en  $(0, 0)$ . Como  $dy/dt$  contiene un término  $\sin x$ , no se observa de inmediato cuáles son los términos lineales de este sistema. Sin embargo, del cálculo sabemos que el desarrollo en series de potencia de  $\sin x$  es

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

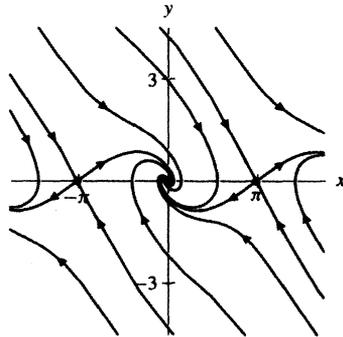
Por tanto, podemos escribir

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -y - \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots \right). \end{aligned}$$

Cerca del origen cancelamos los términos no lineales y nos quedamos con el sistema lineal

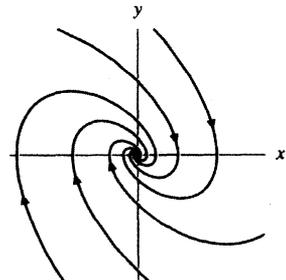
$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -y - x. \end{aligned}$$

Los eigenvalores de este sistema son  $(-1 \pm \sqrt{3}i)/2$ . Como éstos son números complejos con partes reales negativas, esperamos que el correspondiente punto de equilibrio para el sistema no lineal sea un sumidero espiral (vea las figuras 5.5 y 5.6).



**Figura 5.5**  
Plano fase para el sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -y - \sin x. \end{aligned}$$



**Figura 5.6**  
Plano fase para el sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -y - x. \end{aligned}$$

## Linearización

El siguiente paso es hacer el proceso de linearización más ordenado. En los ejemplos anteriores hicimos un cambio de variables para mover el punto de equilibrio al origen. Luego identificamos los términos lineales y no lineales usando cálculo (en caso necesario).

Considere la forma general de un sistema no lineal

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y).\end{aligned}$$

Suponga que  $(x_0, y_0)$  es un punto de equilibrio para este sistema. Queremos entender qué sucede con las soluciones cerca de  $(x_0, y_0)$ , es decir, linearizar el sistema cerca de  $(x_0, y_0)$ . Introducimos nuevas variables

$$\begin{aligned}u &= x - x_0 \\ v &= y - y_0\end{aligned}$$

que mueven el punto de equilibrio al origen. Si  $x$  y  $y$  están cerca del punto de equilibrio  $(x_0, y_0)$ , entonces  $u$  y  $v$  tienden a 0.

Como  $x = u + x_0$  y  $y = v + y_0$  y los números  $x_0$  y  $y_0$  son constantes, el sistema escrito en términos de  $u$  y  $v$  es

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= \frac{d(x - x_0)}{dt} = \frac{dx}{dt} = f(x, y) = f(x_0 + u, y_0 + v) \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{d(y - y_0)}{dt} = \frac{dy}{dt} = g(x, y) = g(x_0 + u, y_0 + v).\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= f(x_0 + u, y_0 + v) \\ \frac{dv}{dt} &= g(x_0 + u, y_0 + v).\end{aligned}$$

Si  $u = v = 0$ , el lado derecho de este sistema desaparece, por lo que hemos movido el punto de equilibrio al origen en el plano  $u$ - $v$ .

Ahora eliminaremos los términos “de orden superior” o no lineales en las expresiones para  $du/dt$  y  $dv/dt$ . Como esas expresiones pueden incluir funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas, no siempre es claro cuáles son los términos lineales. En este caso es necesario estudiar  $f$  y  $g$  con más atención.

La idea básica del cálculo diferencial es que es posible estudiar una función analizando su “mejor aproximación lineal”; la cual está dada por el plano tangente para funciones de dos variables. Por tanto, tenemos

$$f(x_0 + u, y_0 + v) \approx f(x_0, y_0) + \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right] u + \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right] v,$$

cuyo lado derecho es la ecuación para el plano tangente a la gráfica de  $f$  en  $(x_0, y_0)$ . (Esta expresión es también la aproximación polinomial de primer grado de Taylor para  $f$ .)

Podemos entonces reescribir el sistema para  $du/dt$  y  $dv/dt$  como

$$\frac{du}{dt} = f(x_0, y_0) + \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right] u + \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right] v + \dots$$

y

$$\frac{dv}{dt} = g(x_0, y_0) + \left[ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \right] u + \left[ \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \right] v + \dots,$$

donde “. . .” significa los términos que forman la diferencia entre el plano tangente y la función. Ésos son precisamente los términos que deseamos ignorar al formar la aproximación lineal del sistema. Como  $f(x_0, y_0) = 0$  y  $g(x_0, y_0) = 0$ , podemos usar la notación matricial para escribir el sistema en forma breve, así:

$$\begin{pmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \dots$$

La matriz de  $2 \times 2$  de las derivadas parciales en esta expresión se llama **matriz jacobiana** del sistema en  $(x_0, y_0)$ .

En consecuencia, el **sistema linearizado** en el punto de equilibrio  $(x_0, y_0)$  es

$$\begin{pmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Usamos este sistema de “linearización” para estudiar el comportamiento de soluciones del sistema no lineal cerca del punto de equilibrio  $(x_0, y_0)$ . Observe que para crear el sistema linearizado sólo necesitamos conocer las derivadas parciales de las componentes del campo vectorial en el punto de equilibrio. No tenemos que calcular el cambio de variables moviendo el punto de equilibrio al origen.

Como siempre, la derivada de una función no lineal únicamente proporciona una aproximación local. Por consiguiente, las soluciones del sistema linearizado sólo están cercanas a las del sistema no lineal cerca del punto de equilibrio. La pregunta de qué tan próximos debemos estar del punto de equilibrio para que la aproximación lineal sea de valor depende del tamaño de los términos no lineales.

## Más ejemplos de linearización

Considere el sistema no lineal

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -2x + 2x^2 \\ \frac{dy}{dt} &= -3x + y + 3x^2. \end{aligned}$$

Hay dos puntos de equilibrio para este sistema:  $(0, 0)$  y  $(1, 0)$ . Para entender las soluciones que comienzan cerca de éstos, calculamos primero la matriz jacobiana

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + 4x & 0 \\ -3 + 6x & 1 \end{pmatrix}$$

ya que  $f(x, y) = -2x + 2x^2$  y  $g(x, y) = -3x + y + 3x^2$ . En los dos puntos de equilibrio, tenemos

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) & \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) & \frac{\partial g}{\partial y}(0, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) & \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(1, 0) & \frac{\partial g}{\partial y}(1, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cerca de  $(0, 0)$ , el plano fase para el sistema no lineal debe parecerse al del sistema linealizado

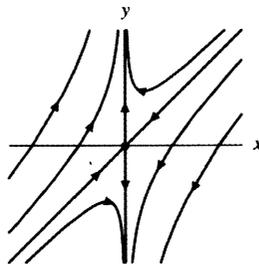
$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{Y}.$$

Los eigenvalores de este sistema lineal son  $-2$  y  $1$ , por lo que el origen es un punto silla. Podemos calcular que  $(0, 1)$  es un eigenvector para el eigenvalor  $1$  y que  $(1, 1)$  es un eigenvector para el eigenvalor  $-2$ . Usando esta información, podemos esbozar el plano fase para el sistema lineal (vea la figura 5.7).

En  $(1, 0)$ , el otro punto de equilibrio, el sistema linealizado es

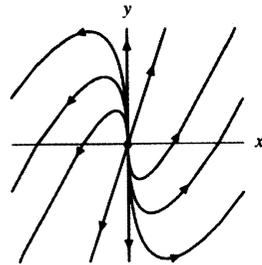
$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{Y}.$$

Los eigenvalores aquí son  $2$  y  $1$ , por lo que para este sistema el origen es una fuente. Usando el hecho de que  $(0, 1)$  es un eigenvector para el eigenvalor  $1$ , y  $(1, 3)$  lo es para el eigenvalor  $2$ , podemos esbozar el plano fase (vea la figura 5.8).



**Figura 5.7**  
Plano fase para el sistema

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{Y}.$$



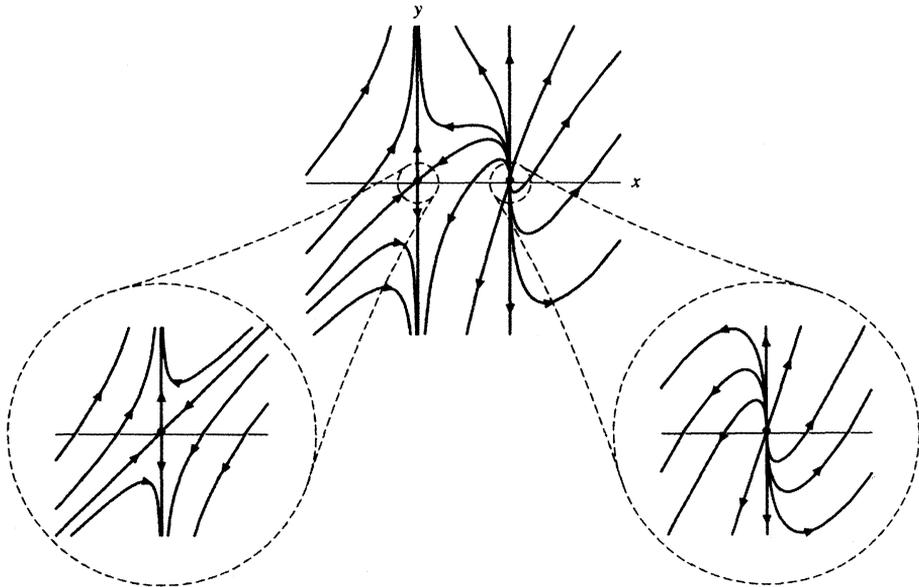
**Figura 5.8**  
Plano fase para el sistema

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{Y}.$$

Cerca de los dos puntos de equilibrio, el plano fase para el sistema no lineal se parece al de los sistemas linealizados. Las curvas solución (numéricamente aproximadas por la computadora) se muestran en la figura 5.9. Si amplificamos el plano fase cerca de  $(0, 0)$  y  $(1, 0)$ , vemos que las curvas solución efectivamente se parecen a las de los sistemas linealizados correspondientes (vea la figura 5.9).

### Clasificación de los puntos de equilibrio

La idea fundamental en que se basa el procedimiento de linealización es usar un sistema lineal para predecir el comportamiento de las soluciones de un sistema no lineal cerca de un punto de equilibrio. En las inmediaciones de dicho punto, las soluciones de los sistemas lineales y no lineales están cercanas entre sí, por lo menos en un intervalo corto. Para la mayor parte de los sistemas, la información ganada al estudiar la linealización es suficiente para determinar el comportamiento a largo plazo de las soluciones del sistema no lineal cerca del punto de equilibrio.



**Figura 5.9**

Curvas solución y ampliaciones cerca de los puntos fijos para el sistema

$$\frac{dx}{dt} = -2x + 2x^2$$

$$\frac{dy}{dt} = -3x + y + 3x^2.$$

Por ejemplo, considere el sistema

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y).\end{aligned}$$

Suponga que  $(x_0, y_0)$  es un punto de equilibrio y sea

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

la matriz jacobiana en  $(x_0, y_0)$ . El sistema linearizado es

$$\begin{pmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{pmatrix} = \mathbf{J} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Si todos los eigenvalores de la matriz jacobiana son números reales negativos o números complejos con parte real negativa, entonces  $(u, v) = (0, 0)$  es un sumidero para el sistema lineal y todas las soluciones se acercan a  $(u, v) = (0, 0)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Para el sistema no lineal, las soluciones que empiezan cerca del punto de equilibrio  $(x, y) = (x_0, y_0)$  se acercan a éste cuando  $t \rightarrow \infty$ . Por tanto, decimos que  $(x_0, y_0)$  es un **sumidero**. Si los eigenvalores son complejos, entonces  $(x_0, y_0)$  es un **sumidero espiral**.

De modo similar, si la matriz jacobiana sólo tiene eigenvalores positivos o eigenvalores complejos con una parte real positiva, entonces las soluciones con condiciones iniciales cerca del punto de equilibrio  $(x_0, y_0)$  tienden a alejarse de éste cuando  $t$  crece. Decimos entonces que para un sistema no lineal el punto  $(x_0, y_0)$  es una **fente**. Si los eigenvalores son complejos, entonces  $(x_0, y_0)$  es una **fente espiral**.

Si la matriz jacobiana tiene un eigenvalor positivo y uno negativo, entonces el punto de equilibrio  $(x_0, y_0)$  es un **punto silla**. Igual que para un sistema lineal con un punto silla en el origen, hay dos curvas de soluciones que se acercan al punto de equilibrio cuando  $t$  se incrementa y otras dos que también se aproximan a dicho punto conforme  $t$  decrece (vea las figuras 5.7 y 5.9). Para el sistema no lineal, esas curvas de soluciones no tienen que ser líneas rectas. Las demás soluciones, con posición inicial cerca de  $(x_0, y_0)$ , se alejan cuando  $t$  crece y  $t$  decrece.

### Un recordatorio

Es importante recordar que esta clasificación de los puntos de equilibrio para los sistemas no lineales no dice nada acerca del comportamiento de las soluciones con posiciones iniciales lejanas a  $(x_0, y_0)$ .

## Separatrices

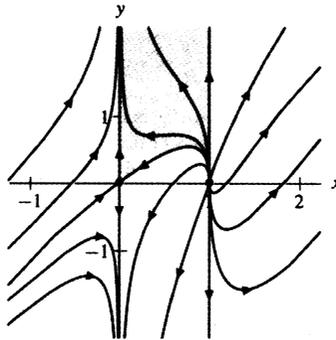
Las cuatro curvas solución especiales que tienden hacia un punto silla cuando  $t \rightarrow \infty$  o  $t \rightarrow -\infty$  se denominan **separatrices**. (Una de esas curvas por sí misma se llama una *separatriz*.) Y tienen una importancia especial porque separan las soluciones con diferentes comportamientos. Las **separatrices estables** son aquellas donde las soluciones tienden

hacia el punto silla cuando  $t \rightarrow \infty$ , mientras que en las **separatrices inestables** las soluciones tienden hacia el punto silla cuando  $t \rightarrow -\infty$ .

En el sistema

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -2x + 2x^2 \\ \frac{dy}{dt} &= -3x + y + 3x^2\end{aligned}$$

estudiado anteriormente, el origen es un punto silla (vea las figuras 5.7 y 5.9). La separatriz estable próxima al origen separa en dos partes la franja del plano fase limitada por las líneas  $x = 0$  y  $x = 1$ . En esa región, las condiciones iniciales que están arriba de la separatriz dan soluciones en que  $y(t) \rightarrow \infty$  cuando  $t$  se incrementa, mientras que las condiciones iniciales que están abajo de la separatriz dan soluciones en que  $y(t) \rightarrow -\infty$  cuando  $t$  crece (vea la figura 5.10).



**Figura 5.10**

Separatrices de  $(0, 0)$  para el sistema

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -2x + 2x^2 \\ \frac{dy}{dt} &= -3x + y + 3x^2,\end{aligned}$$

y regiones de la franja entre  $x = 0$  y  $x = 1$  con diferentes comportamientos a largo plazo.

## Cuando la linearización falla

Desafortunadamente, para algunos puntos de equilibrio de algunos sistemas la información que proporciona el sistema linearizado no es suficiente para determinar el comportamiento completo de las soluciones del sistema no lineal cerca del punto de equilibrio.

Por ejemplo, considere el sistema

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y - (x^2 + y^2)x \\ \frac{dy}{dt} &= -x - (x^2 + y^2)y.\end{aligned}$$

El origen es un punto de equilibrio para este sistema y su sistema linearizado es

$$\begin{pmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Los eigenvalores de este sistema lineal son  $\pm i$  y por tanto se trata de un centro. Todas las soluciones no cero del sistema linearizado son periódicas. De hecho, cada una de ellas es un círculo concéntrico al origen.

Sin embargo, no hay soluciones periódicas para el sistema no lineal. Para conocer la causa, consideremos el campo vectorial como una suma del campo vectorial lineal  $\mathbf{V}_1(x, y) = (y, -x)$  y el campo vectorial no lineal  $\mathbf{V}_2(x, y) = -(x^2 + y^2)x, -(x^2 + y^2)y)$ .  $\mathbf{V}_1$  corresponde al sistema linearizado. Éste siempre es tangente a círculos con centro en el origen. Por otra parte,  $\mathbf{V}_2(x, y) = -(x^2 + y^2)x, -(x^2 + y^2)y)$  siempre señala directamente hacia  $(0, 0)$  ya que es un múltiplo escalar del campo  $(-x, -y)$ . (El número positivo es el escalar  $x^2 + y^2$ .) El resultado de sumar  $\mathbf{V}_1(x, y)$  y  $\mathbf{V}_2(x, y)$  es un campo vectorial que siempre tiene una componente radial negativa. Las soluciones del sistema no lineal se mueven entonces siempre en espiral hacia  $(0, 0)$  (vea la figura 5.11).

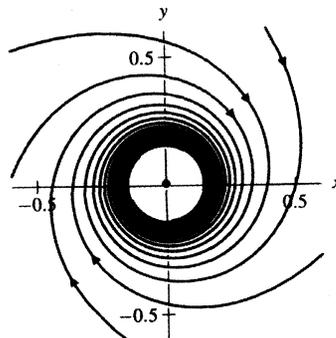
Note que si cambiamos los signos de los términos de orden superior en el sistema anterior, el resultado es

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y + (x^2 + y^2)x \\ \frac{dy}{dt} &= -x + (x^2 + y^2)y\end{aligned}$$

este sistema tiene la misma linearización cerca de  $(0, 0)$ , pero ahora las soluciones se mueven en espiral alejándose del origen.

En este ejemplo, las soluciones del sistema no lineal y las del linearizado son aproximadamente las mismas cerca del origen, por lo menos durante un corto intervalo. Sin embargo, como el sistema linearizado es un centro, cualquier perturbación por mínima que sea puede cambiar el comportamiento a largo plazo de las soluciones. Aun aquella causada por la inclusión de los términos no lineales puede convertir al centro en un sumidero o una fuente espiral.

Afortunadamente, sólo existen dos situaciones en que el comportamiento a largo plazo de las soluciones cerca de un punto de equilibrio del sistema no lineal y su linearización pueden diferir. Una es cuando el sistema linearizado es un centro. La otra, cuando el sistema linearizado tiene cero como eigenvalor (vea los ejercicios). En cualquier otro caso, el comportamiento a largo plazo de las soluciones de un sistema no lineal cerca de un punto de equilibrio es el mismo que para las soluciones de su linearización.



**Figura 5.11**

Las curvas solución para el sistema

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y - (x^2 + y^2)x \\ \frac{dy}{dt} &= -x - (x^2 + y^2)y\end{aligned}$$

se mueven en espiral lentamente hacia el punto de equilibrio en el origen, aun cuando la linearización ahí es un centro.

## EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 5.1

1. Considere los tres sistemas

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} & \frac{dx}{dt} = 2x + y & \text{(ii)} & \frac{dx}{dt} = 2x + y & \text{(iii)} & \frac{dx}{dt} = 2x + y \\ & \frac{dy}{dt} = -y + x^2 & & \frac{dy}{dt} = y + x^2 & & \frac{dy}{dt} = -y - x^2. \end{array}$$

Los tres sistemas tienen un punto de equilibrio en  $(0, 0)$ . ¿Cuáles dos sistemas tienen planos fase con el mismo “retrato local” cerca de  $(0, 0)$ ? Justifique su respuesta. [Sugerencia: Se requieren muy pocos cálculos para este ejercicio, pero no deje de dar una justificación completa.]

2. Considere los tres sistemas siguientes:

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} & \frac{dx}{dt} = 3\sin x + y & \text{(ii)} & \frac{dx}{dt} = -3\sin x + y & \text{(iii)} & \frac{dx}{dt} = -3\sin x + y \\ & \frac{dy}{dt} = 4x + \cos y - 1 & & \frac{dy}{dt} = 4x + \cos y - 1 & & \frac{dy}{dt} = 4x + 3\cos y - 3. \end{array}$$

Los tres sistemas tienen un punto de equilibrio en  $(0, 0)$ . ¿Cuáles son los dos sistemas que tienen planos fase con el mismo “retrato local” cerca de  $(0, 0)$ ? Justifique su respuesta. [Sugerencia: Se requieren muy pocos cálculos para este ejercicio, pero no deje de exponer sus argumentos.]

3. Para el sistema

$$\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = -2x + y \\ \frac{dy}{dt} = -y + x^2. \end{array}$$

- Encuentre el sistema linealizado para el punto de equilibrio  $(0, 0)$ .
- Clasifique  $(0, 0)$  (como fuente, sumidero, centro, ...).
- Esboce el plano fase para el sistema no lineal cerca de  $(0, 0)$ .
- Repita los incisos (a) a (c) para el punto de equilibrio en  $(2, 4)$ .

4. En el sistema

$$\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = -x \\ \frac{dy}{dt} = -4x^3 + y. \end{array}$$

- Demuestre que el origen es el único punto de equilibrio.
- Encuentre el sistema linealizado en el origen.
- Clasifíquelo y esboce su plano fase.

5. Considere el sistema en el ejercicio 4.

- (a) Encuentre la solución general de la ecuación  $dx/dt = -x$ . [*Sugerencia:* La solución es tan fácil como parece ser.]  
 (b) Usando la solución del inciso (a) en vez de  $x$ , determine la solución general de la ecuación

$$\frac{dy}{dt} = -4x^3 + y.$$

[*Sugerencia:* Esto proporciona un repaso de las ecuaciones lineales en la sección 1.8.]

- (c) Use los resultados de los incisos (a) y (b) para obtener la solución general del sistema.  
 (d) Encuentre las curvas solución del sistema que tienden al origen cuando  $t \rightarrow \infty$ .  
 (e) Encuentre las curvas solución del sistema que se aproximan al origen cuando  $t \rightarrow -\infty$ .  
 (f) En el plano fase, esboce las curvas solución correspondientes a esas soluciones. Son las separatrices.  
 (g) Compare el esbozo del sistema linealizado que obtuvo en el ejercicio 4 contra un bosquejo de las soluciones separatrices para el punto de equilibrio en el origen para este sistema. ¿En qué se parecen las dos gráficas? ¿Cómo difieren?
6. Para el modelo de población de especies en competencia

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 2x \left(1 - \frac{x}{2}\right) - xy \\ \frac{dy}{dt} &= 3y \left(1 - \frac{y}{3}\right) - 2xy\end{aligned}$$

estudiado en esta sección, mostramos que el punto de equilibrio  $(1, 1)$  es un punto silla.

- (a) Encuentre el sistema linealizado cerca de cada uno de los otros puntos de equilibrio.  
 (b) Clasifique cada punto de equilibrio (como fuente, sumidero, punto silla, etcétera).  
 (c) Esboce el plano fase de cada sistema linealizado.  
 (d) Dé una breve descripción del plano fase cerca de cada punto de equilibrio del sistema no lineal.

En los ejercicios 7-16, restringimos la atención al primer cuadrante ( $x, y \geq 0$ ). Para cada sistema,

- (a) encuentre y clasifique todos los puntos de equilibrio (en el primer cuadrante),  
 (b) esboce el plano fase del sistema cerca de cada punto de equilibrio, y  
 (c) describa los comportamientos de las soluciones cerca de cada punto de equilibrio.

7. 
$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x(-x - 3y + 150) \\ \frac{dy}{dt} &= y(-2x - y + 100)\end{aligned}$$

8. 
$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x(10 - x - y) \\ \frac{dy}{dt} &= y(30 - 2x - y)\end{aligned}$$

9. 
$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x(100 - x - 2y) \\ \frac{dy}{dt} &= y(150 - x - 6y)\end{aligned}$$

10. 
$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x(-x - y + 100) \\ \frac{dy}{dt} &= y(-x^2 - y^2 + 2500)\end{aligned}$$

11.  $\frac{dx}{dt} = x(-x - y + 40)$   
 $\frac{dy}{dt} = y(-x^2 - y^2 + 2500)$
12.  $\frac{dx}{dt} = x(-4x - y + 160)$   
 $\frac{dy}{dt} = y(-x^2 - y^2 + 2500)$
13.  $\frac{dx}{dt} = x(-8x - 6y + 480)$   
 $\frac{dy}{dt} = y(-x^2 - y^2 + 2500)$
14.  $\frac{dx}{dt} = x(2 - x - y)$   
 $\frac{dy}{dt} = y(y - x^2)$
15.  $\frac{dx}{dt} = x(2 - x - y)$   
 $\frac{dy}{dt} = y(y - x)$
16.  $\frac{dx}{dt} = x(x - 1)$   
 $\frac{dy}{dt} = y(x^2 - y)$

17. Considere el sistema

$$\frac{dx}{dt} = -x^3$$

$$\frac{dy}{dt} = -y + y^2.$$

El sistema tiene puntos de equilibrio en  $(0, 0)$  y  $(0, 1)$ .

- (a) Encuentre el sistema linealizado en  $(0, 0)$ .
- (b) Determine los eigenvalores y eigenvectores y dibuje el plano fase del sistema linealizado en  $(0, 0)$ .
- (c) Encuentre el sistema linealizado en  $(0, 1)$ .
- (d) Calcule los eigenvalores y eigenvectores y esboce el plano fase del sistema linealizado en  $(0, 1)$ .
- (e) Bosqueje el plano fase del sistema no lineal. [*Sugerencia:* El sistema se desacopla; dibuje entonces primero una línea fase para cada una de las ecuaciones individuales.]
- (f) ¿Por qué se ven tan diferentes los planos fase para los sistemas lineales y no lineal cerca de los puntos de equilibrio?
18. Si un sistema no lineal depende de un parámetro, entonces los puntos de equilibrio pueden cambiar cuando varía el parámetro. En otras palabras, cuando éste se modifica puede ocurrir una bifurcación. Considere la familia paramétrica

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - a$$

$$\frac{dy}{dt} = -y(x^2 + 1),$$

donde  $a$  es el parámetro.

- (a) Demuestre que el sistema no tiene puntos de equilibrio si  $a < 0$ .
- (b) Compruebe que tiene dos puntos de equilibrio si  $a > 0$ .
- (c) Demuestre que sólo posee un punto de equilibrio si  $a = 0$ .
- (d) Encuentre la linealización del punto de equilibrio para  $a = 0$  y calcule los eigenvalores de este sistema lineal.

**Observación:** Cuando el parámetro  $a$  crece desde  $a = 0$ , el sistema cambia de cero a dos puntos de equilibrio. Decimos que el sistema tiene una bifurcación en  $a = 0$  y que  $a = 0$  es un valor de bifurcación del parámetro.

19. Para continuar el estudio del sistema no lineal dado en el ejercicio 18,

- (a) use el campo de direcciones para esbozar el plano fase para el sistema si  $a = -1$ ,
- (b) emplee el campo de direcciones y la linearización en el punto de equilibrio para bosquejar el plano fase para  $a = 0$ , y
- (c) utilice el campo de direcciones y la linearización en los puntos de equilibrio para dibujar el plano fase para  $a = 1$ .

**Observación:** La transición de un sistema sin puntos de equilibrio a otro con un punto silla y un sumidero, a través de un punto de equilibrio con cero como eigenvalor, es típica de bifurcaciones que generan puntos de equilibrio.

En los ejercicios 20-25, cada sistema depende del parámetro  $a$ . En cada ejercicio,

- (a) encuentre los puntos de equilibrio,
- (b) determine todos los valores de  $a$  donde ocurre una bifurcación, y
- (c) en un corto párrafo completo con figuras, describa el plano fase en, antes y después de cada valor de bifurcación.

$$20. \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y - x^2 \\ \frac{dy}{dt} &= y - a \end{aligned}$$

$$21. \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y - x^2 \\ \frac{dy}{dt} &= a \end{aligned}$$

$$22. \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y - x^2 \\ \frac{dy}{dt} &= y - x - a \end{aligned}$$

$$23. \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y - ax^3 \\ \frac{dy}{dt} &= y - x \end{aligned}$$

$$24. \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y - x^2 + a \\ \frac{dy}{dt} &= y + x^2 - a \end{aligned}$$

$$25. \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y - x^2 + a \\ \frac{dy}{dt} &= y + x^2 \end{aligned}$$

26. El sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(-x - y + 70) \\ \frac{dy}{dt} &= y(-2x - y + a) \end{aligned}$$

es un modelo para un par de especies en competencia, en el cual  $dy/dt$  depende del parámetro  $a$ . Encuentre los dos valores de bifurcación de  $a$ . Describa el destino de las poblaciones  $x$  y  $y$  antes y después de cada bifurcación.

27. Suponga que dos especies  $X$  y  $Y$  se introducirán a una isla. Se sabe que ambas compiten entre sí, pero se desconoce la naturaleza precisa de su interacción. Suponemos que las poblaciones  $x(t)$  y  $y(t)$  de  $X$  y  $Y$ , respectivamente, son modeladas por un sistema

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x, y).$$

- (a) Suponga  $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$ ; esto significa que  $(0, 0)$  es un punto de equilibrio. ¿Cómo correlacionaría esto con la capacidad de  $X$  y  $Y$  para migrar a la isla?
- (b) Si una pequeña población está formada por una sola especie que se reproduce rápidamente, ¿qué puede concluir acerca de los valores de  $\partial f/\partial x$  y  $\partial g/\partial y$  en  $(0, 0)$ ?
- (c) Como  $X$  y  $Y$  compiten por los recursos, la presencia de cualquiera de las especies disminuirá la razón de crecimiento de la otra población. ¿Nos dice algo lo anterior acerca de  $\partial f/\partial y$  y  $\partial g/\partial x$  en  $(0, 0)$ ?
- (d) Usando las hipótesis de los incisos (a) al (c), ¿qué tipo(s) de punto de equilibrio sería  $(0, 0)$ ? [Podría haber más de una posibilidad. Especifíquelas todas.]
- (e) Para cada una de las posibilidades del inciso (d), esboce un plano fase cerca de  $(0, 0)$ .

Justifique todas sus respuestas.

28. Para las dos especies  $X$  y  $Y$  del ejercicio 27, suponga que tanto  $X$  como  $Y$  se reproducen muy lentamente, y que la competencia entre ambas es muy intensa.

- (a) ¿Qué puede usted concluir acerca de  $\partial f/\partial x$  y  $\partial g/\partial y$  en  $(0, 0)$ ?
- (b) ¿Cuál es su conclusión respecto de  $\partial f/\partial y$  y  $\partial g/\partial x$  en  $(0, 0)$ ?
- (c) ¿Qué tipo(s) de punto de equilibrio puede ser  $(0, 0)$ ? [Puede haber más de una probabilidad. Si es así, especifíquelas todas.]
- (d) Para cada una de las posibilidades anotadas en el inciso (c), esboce un plano fase cerca de  $(0, 0)$ .

Recuerde justificar todas sus respuestas.

29. Para las especies  $X$  y  $Y$  de los ejercicios 27 y 28, supongamos que  $X$  se reproduce muy rápidamente en la isla si no hay ninguna  $Y$  presente, y que la especie  $Y$  se reproduce lentamente si no hay ninguna  $X$  presente. También considere que la tasa de crecimiento de  $X$  disminuye significativamente por la presencia de  $Y$ , pero que  $Y$  es indiferente a la población de  $X$ .

- (a) ¿Qué puede decir acerca de  $\partial f/\partial x$  y  $\partial g/\partial y$  en  $(0, 0)$ ?
- (b) ¿Y respecto de  $\partial f/\partial y$  y  $\partial g/\partial x$  en  $(0, 0)$ ?
- (c) ¿Cuáles son los posibles tipos del punto de equilibrio en  $(0, 0)$ ? [Puede haber más de una probabilidad. Si es así, especifíquelas todas.]
- (d) Para cada uno de los tipos anteriores, dibuje el plano fase cerca de  $(0, 0)$ .

Justifique todas sus respuestas.

30. Imagine que dos países similares  $Y$  y  $Z$  están comprometidos en una carrera armamentista. Sean  $y(t)$  y  $z(t)$  el tamaño de los acopios de armamentos de  $Y$  y  $Z$ , respectivamente. Modelamos la situación con el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= h(y, z) \\ \frac{dz}{dt} &= k(y, z).\end{aligned}$$

Suponga que todo lo que sabemos acerca de las funciones  $h$  y  $k$  son las dos hipótesis:

- (i) Si el acopio de armas del país  $Z$  no está cambiando, entonces cualquier incremento en el acopio de  $Y$  da como resultado un decremento en la razón de aumento de producción de armas del país  $Y$ . Lo mismo es cierto para el país  $Z$ .
  - (ii) Si cualquier país aumenta su acopio, el otro responde incrementando su razón de producción de armas.
- (a) ¿Qué implican las hipótesis respecto de  $\partial h/\partial y$  y  $\partial k/\partial z$ ?
- (b) ¿Y qué implican acerca de  $\partial h/\partial z$  y  $\partial k/\partial y$ ?
- (c) ¿Qué puntos de equilibrio son posibles para este sistema? Justifique su respuesta. [Sugerencia: Suponga que tiene un punto de equilibrio. ¿Qué implican sus resultados en los incisos(a) y (b) acerca de la matriz jacobiana en ese punto?]

## 5.2 ANÁLISIS CUALITATIVO

El proceso de linealización analizado en la sección 5.1 nos da un procedimiento bastante efectivo para entender el comportamiento de las soluciones de un sistema no lineal cerca de un punto de equilibrio. Desafortunadamente, la información "local" que proporciona sólo puede usarse cerca de puntos de equilibrio. (Hacer predicciones basadas en linealizaciones lejanas de los puntos de equilibrio puede acarrear consecuencias drásticas; vea la sección 4.5.)

Hasta ahora nuestros únicos procedimientos generales para el estudio del comportamiento de los sistemas no lineales lejos de los puntos de equilibrio son numéricos. Es cierto que el estudio numérico cuidadoso de un sistema puede dar considerable información acerca del comportamiento de sus soluciones. Sin embargo, es difícil saber si se han probado las condiciones iniciales suficientes para observar todos los posibles comportamientos de las soluciones. En esta sección desarrollaremos algunos procedimientos cualitativos que pueden combinarse con linealizaciones y métodos numéricos.

### Especies en competencia

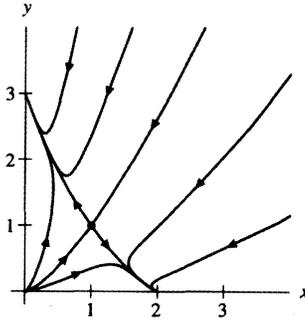
Recuerde el sistema

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 2x \left(1 - \frac{x}{2}\right) - xy \\ \frac{dy}{dt} &= 3y \left(1 - \frac{y}{3}\right) - 2xy,\end{aligned}$$

donde  $x$  y  $y$  son poblaciones de dos especies que compiten por recursos (vea la sección 5.1).

En la sección 5.1 determinamos que los puntos de equilibrio son  $(0, 0)$ ,  $(0, 3)$ ,  $(2, 0)$  y  $(1, 1)$ . Por linealización, encontramos que el punto  $(1, 1)$  es un punto silla. Hay una curva cuyas soluciones se acercan a  $(1, 1)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , y además separa el plano fase en

dos regiones. El uso de métodos numéricos sugiere que soluciones que no tienden a  $(1, 1)$ , lo hacen hacia  $(0, 3)$  o a  $(2, 0)$  cuando  $t$  crece (vea la figura 5.12). Para verificar esta observación y entender mejor el comportamiento de las soluciones, veremos con más detalle el campo de direcciones.



**Figura 5.12**

Retrato fase para el sistema de especies en competencia

$$\frac{dx}{dt} = 2x \left(1 - \frac{x}{2}\right) - xy$$

$$\frac{dy}{dt} = 3y \left(1 - \frac{y}{3}\right) - 2xy.$$

Este retrato fase generado por computadora sugiere que las soluciones que no tienden a  $(1, 1)$  lo hacen a  $(0, 3)$  o a  $(2, 0)$ .

## Nulclinales

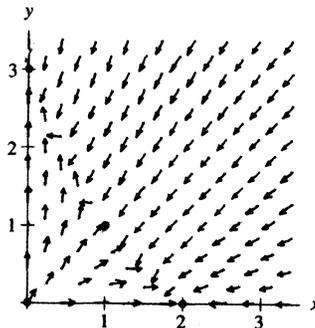
El campo de direcciones para el sistema de las especies en competencia está esbozado en la figura 5.13. Podemos emplearla para hacer un bosquejo de las curvas solución, pero con un poco más de análisis cualitativo es posible dar una imagen mucho más completa del comportamiento de las soluciones. Una herramienta para este análisis es la **nulclinal**.

**DEFINICIÓN** Para el sistema

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x, y),$$

la **nulclinal**  $x$  es el conjunto de puntos  $(x, y)$  donde  $f(x, y)$  es cero, es decir, la curva de nivel donde  $f(x, y)$  es cero. La **nulclinal**  $y$  es el conjunto de puntos donde  $g(x, y)$  es cero.



**Figura 5.13**

Campo de direcciones para el sistema de especies en competencia

$$\frac{dx}{dt} = 2x \left(1 - \frac{x}{2}\right) - xy$$

$$\frac{dy}{dt} = 3y \left(1 - \frac{y}{3}\right) - 2xy.$$

Es difícil juzgar el comportamiento a largo plazo de las soluciones sólo a partir del campo de direcciones.

A lo largo de la nulclinal  $x$ , la componente  $x$  es cero y en consecuencia el campo vectorial es vertical. Indica hacia arriba o hacia abajo. De modo similar, sobre la nulclinal  $y$ , la componente  $y$  es cero, por lo que el campo vectorial es horizontal. Señala hacia la izquierda o la derecha. Como  $f(x, y)$  y  $g(x, y)$  deben ser cero en un punto de equilibrio, las intersecciones de las nulclinales están en esos puntos.

Para mostrar cómo emplear las nulclinales en el análisis cualitativo de sistemas, consideremos nuestro ejemplo de especies en competencia

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 2x \left(1 - \frac{x}{2}\right) - xy \\ \frac{dy}{dt} &= 3y \left(1 - \frac{y}{3}\right) - 2xy.\end{aligned}$$

Recuerde que sólo nos interesa saber qué sucede en el primer cuadrante ( $x, y \geq 0$ ), ya que éste es un modelo de población. La nulclinal  $x$  es el conjunto de puntos  $(x, y)$  que satisfacen

$$\frac{dx}{dt} = 2x \left(1 - \frac{x}{2}\right) - xy = 0.$$

Como esta ecuación es equivalente a  $x(2 - x - y) = 0$ , la nulclinal  $x$  consiste en dos líneas,  $x = 0$  y  $y = -x + 2$ . Sobre esas líneas la componente  $x$  del campo vectorial es cero. Entonces, el campo vectorial es vertical a lo largo de esas líneas. En el resto del plano fase, la componente  $x$  es o positiva o negativa. Si  $dx/dt > 0$ , las soluciones se mueven hacia la derecha; si  $dx/dt < 0$ , se desplazan a la izquierda. En la figura 5.14 marcamos parte de la nulclinal  $x$  con líneas verticales para no olvidar que a lo largo de ésta el campo vectorial es vertical. Podemos rotular las regiones fuera de la nulclinal  $x$  como “derecha” o “izquierda”, dependiendo de que  $dx/dt$  sea positiva o negativa.

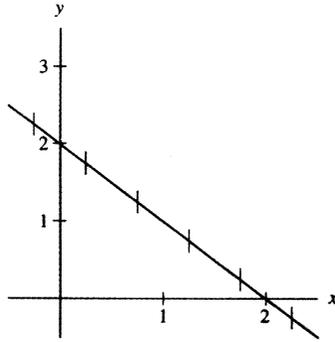
De manera semejante, la nulclinal  $y$  es la serie de puntos donde  $dy/dt = 0$ . Éste es el conjunto de puntos que satisfacen

$$3y \left(1 - \frac{y}{3}\right) - 2xy = y(3 - y - 2x) = 0.$$

Esta serie también consiste en dos líneas,  $y = 0$  y  $y = -2x + 3$ . Sobre éstas, la componente  $y$  del campo vectorial es cero, por lo que aquí el campo vectorial es horizontal. Sobre el resto del plano fase, si  $dy/dt > 0$  las soluciones se mueven hacia arriba, o bien, si  $dy/dt < 0$  las soluciones se mueven hacia abajo. En la figura 5.15 marcamos parte de la nulclinal  $y$  con segmentos horizontales, como recordatorio de que a lo largo de ésta el campo vectorial es horizontal. Resaltamos las regiones fuera de la nulclinal  $y$  como “arriba” o “abajo”, dependiendo del signo de  $dy/dt$ .

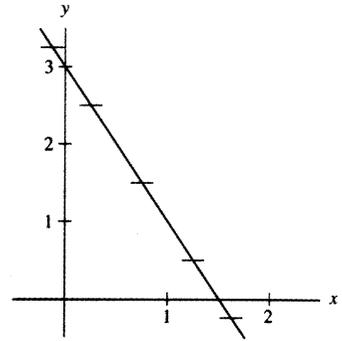
### Análisis usando nulclinales

En la figura 5.16 combinamos las nulclinales  $x$  y  $y$ . Los puntos de equilibrio ocurren en las intersecciones de éstas. Las nulclinales dividen el primer cuadrante en cuatro regiones designadas A, B, C y D. Podemos usar esta figura para hacer un análisis detallado del comportamiento de las soluciones de este sistema.



**Figura 5.14**  
Las nulclinales  $x$  para el sistema

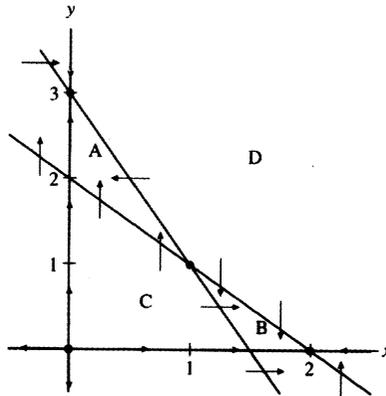
$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 2x \left(1 - \frac{x}{2}\right) - xy \\ \frac{dy}{dt} &= 3y \left(1 - \frac{y}{3}\right) - 2xy.\end{aligned}$$



**Figura 5.15**  
Las nulclinales  $y$  para el sistema

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 2x \left(1 - \frac{x}{2}\right) - xy \\ \frac{dy}{dt} &= 3y \left(1 - \frac{y}{3}\right) - 2xy.\end{aligned}$$

Primero consideremos la región triangular A (vea la figura 5.16). El segmento  $0 < y < 3$  sobre el eje  $y$  es una curva solución, y el campo vectorial sobre los otros dos lados de A señalan hacia la región A. Por consiguiente, una solución que comience en esta región en el tiempo cero permanecerá ahí para todo tiempo positivo. No hay manera de que pueda salir. A se encuentra en las regiones “izquierda” ( $dx/dt < 0$ ) y “superior” ( $dy/dt > 0$ ) del plano fase, por lo que podemos marcarla “izquierda-superior”. Es decir, cuando  $t$  se incrementa, las soluciones que se encuentran en A deben moverse hacia la esquina superior-izquierda de la región, hacia el punto de equilibrio  $(0, 3)$ .



**Figura 5.16**  
Las nulclinales  $x$  y  $y$  para

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 2x \left(1 - \frac{x}{2}\right) - xy \\ \frac{dy}{dt} &= 3y \left(1 - \frac{y}{3}\right) - 2xy.\end{aligned}$$

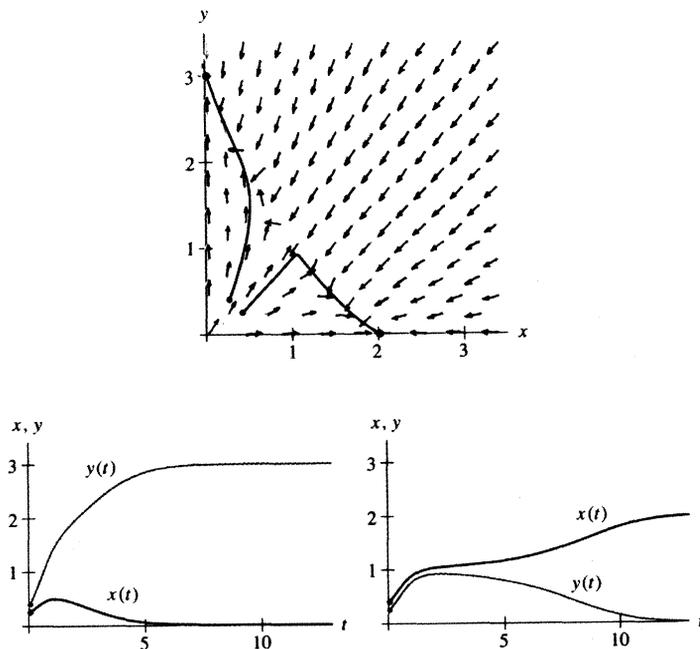
Las nulclinales dividen el primer cuadrante en cuatro regiones marcadas como A, B, C y D.

De la misma manera, las soluciones tampoco pueden salir de la región B y se mueven “derecha-abajo” cuando  $t$  crece. Por tanto, todas las que se encuentran en dicha región tienden al punto de equilibrio  $(2, 0)$  cuando  $t$  se incrementa. En la figura 5.17 mostramos dos soluciones del modelo de las especies en competencia junto con sus gráficas  $x(t)$  y  $y(t)$ .

Las soluciones en la región C se mueven “hacia arriba y hacia la derecha”. Con esas soluciones pueden suceder tres cosas: o salen de la región C y entran a A, o salen de C y entran a B o se aproximan al punto de equilibrio  $(1, 1)$ . Como este último es un punto silla, las soluciones que entran a A quedan divididas de las que entran a B por la separatriz estable de  $(1, 1)$ .

Asimismo, las soluciones en la región D se mueven hacia la izquierda y hacia abajo, y tienden hacia las regiones A y B o al punto de equilibrio  $(1, 1)$ . Nuevamente la separatriz estable de  $(1, 1)$  separa las soluciones que entran a A, y tienden a  $(0, 3)$  de aquellas que entran a B y se acercan a  $(2, 0)$ .

Este análisis nos da un retrato cualitativo bastante completo del comportamiento de las soluciones del modelo de las especies en competencia. Sabemos que la mayor parte de las soluciones tienden a una población de equilibrio con una especie extinta y la otra en su capacidad de soporte (vea la figura 5.17). La separatriz estable del punto silla  $(1, 1)$  divide los dos comportamientos de largo plazo.



**Figura 5.17**

Dos soluciones en el plano fase para el sistema de especies en competencia anterior con sus correspondientes gráficas  $x(t)$  y  $y(t)$ .

### Observaciones importantes

En este ejemplo ambas nulclinales consisten en líneas rectas. Pero, por lo general, pueden ser cualquier tipo de curva, y pronto estudiaremos esos casos.

Observe también que en este ejemplo hay dos tipos muy diferentes de nulclinales. Para las que se encuentran a lo largo de los ejes  $x$  y  $y$ , el campo vectorial fue (por coincidencia) tangente a esas líneas. En consecuencia, las soluciones que comienzan sobre esas líneas permanecen en ellas para siempre. Podemos usar los procedimientos de la sección 1.6 para analizarlas completamente, ya que esas nulclinales son en realidad líneas fase para una ecuación unidimensional.

En este ejemplo, el campo vectorial no es tangente a las otras dos nulclinales, sino que traza la trayectoria de éstas; dichas líneas, a su vez, sólo nos dan información acerca de la dirección de las soluciones cuando cruzan la nulclinal.

En particular, es importante notar la diferencia entre una solución de línea recta (como se vio en el capítulo 3) y una nulclinal. La primera es una curva solución que corresponde a un eigenvector real para un sistema lineal. Una nulclinal es una curva a lo largo de la cual el campo vectorial es puramente horizontal o vertical. Es posible que una nulclinal y una solución de línea recta coincidan para algunos sistemas lineales, pero en general son diferentes.

### Nulclinales que no son líneas

Como un ejemplo algo más complicado de cómo se usan las nulclinales, considere

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 2x \left(1 - \frac{x}{2}\right) - xy \\ \frac{dy}{dt} &= y \left(\frac{9}{4} - y^2\right) - x^2y.\end{aligned}$$

Aún podemos interpretarlo como un modelo de especies en competencia, porque la razón de crecimiento de cada una de ellas decrece cuando la otra población se incrementa. En este modelo, las complicaciones adicionales en la ecuación  $dy/dt$  son con el fin de ilustrar nuestros procedimientos. Como es usual con los modelos de población, sólo consideramos las soluciones en el primer cuadrante.

La nulclinal  $x$  satisface la ecuación

$$x(2 - x - y) = 0,$$

que consta de las dos líneas  $x = 0$  y  $y = -x + 2$ . La nulclinal  $y$  es el conjunto de puntos  $(x, y)$  que satisface

$$y \left(-x^2 - y^2 + \frac{9}{4}\right) = 0.$$

Esos puntos se encuentran sobre la línea  $y = 0$  o sobre el círculo  $x^2 + y^2 = 9/4 = (3/2)^2$ . Los puntos de intersección de las nulclinales  $x$  y  $y$  dan los puntos de equilibrio  $(0, 0)$ ,  $(0, 3/2)$ ,  $(1 + \sqrt{2}/4, 1 - \sqrt{2}/4) \approx (1.35, 0.65)$ ,  $(1 - \sqrt{2}/4, 1 + \sqrt{2}/4) \approx (0.65, 1.35)$  y

(2, 0) (vea la figura 5.18). (El punto (0, -3/2) es también un punto de equilibrio, pero como se encuentra fuera del primer cuadrante, no es importante para nuestro análisis.)

Como en el ejemplo previo, los ejes  $x$  y  $y$  consisten en curvas solución. Si  $y = 0$ , entonces  $dy/dt = 0$  y tenemos

$$\frac{dx}{dt} = 2x \left(1 - \frac{x}{2}\right),$$

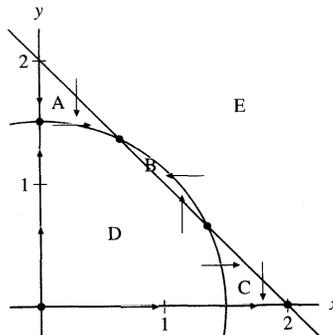
que es la misma ecuación logística que en el ejemplo previo. Si  $x = 0$ , tenemos  $dx/dt = 0$  y

$$\frac{dy}{dt} = y \left(-y^2 + \frac{9}{4}\right).$$

La línea fase para  $dy/dt = y(-y^2 + 9/4)$  tiene puntos de equilibrio en  $y = 0$ ,  $y = 3/2$  ( $y = -3/2$  pero no estamos considerando  $y < 0$ ). Sobre la línea fase,  $y = 0$  es una fuente y  $y = 3/2$  es un sumidero (vea la figura 5.19).

Las nulclinales  $x$  y  $y$  dividen el primer cuadrante en cinco regiones marcadas como A, B, C, D y E en la figura 5.18. Una solución que entra en A, B o C permanece ahí cuando  $t$  crece, ya que el campo vectorial sobre las fronteras de esas regiones nunca señala hacia afuera de ellas. Cuando marcamos las regiones con la dirección del campo vectorial (como "verticalmente hacia arriba" en la región D), vemos que las soluciones en A y B tienden hacia el punto de equilibrio (0.65, 1.35), mientras que aquellas en la región C tienden hacia (2, 0). En la figura 5.19 esbozamos el plano fase y las gráficas  $x(t)$  y  $y(t)$  para dos de esas soluciones. Cuando éstas se encuentran en D y E, entran a una de las regiones A, B o C o tienden a uno de los puntos de equilibrio (0.65, 1.35) o (1.35, 0.65). De nueva cuenta, tenemos soluciones separatrices que dividen las soluciones que tienden a (0.65, 1.35) de las que se aproximan a (2, 0). Linearizando en (1.35, 0.65), podemos confirmar que se trata de un punto silla.

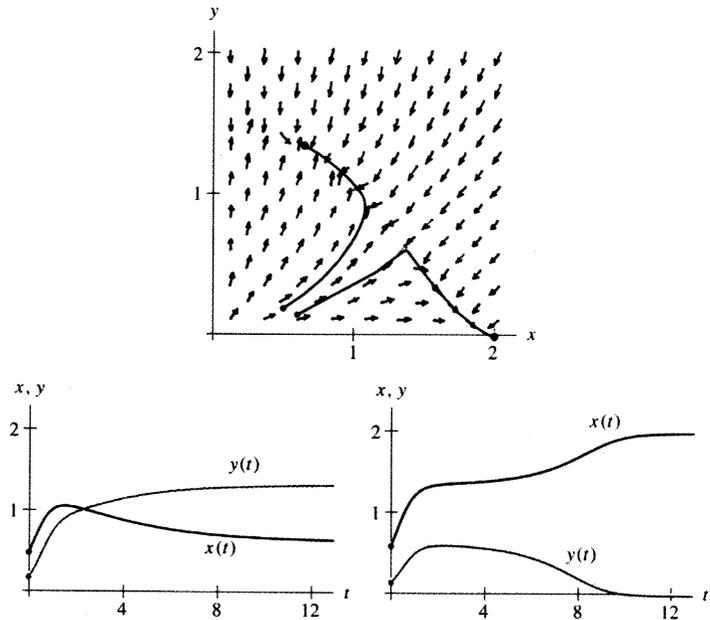
Usando análisis cualitativo que implique las nulclinales, podemos concluir que todas las soluciones en este modelo tienden hacia puntos de equilibrio conforme  $t$  aumenta, igual que en el modelo previo. La selección de hacia qué punto de equilibrio tiende la solución depende de la localización de la condición inicial. A diferencia del ejemplo previo, hay un conjunto grande de soluciones que se acercan al punto de equilibrio (0.65, 1.35), donde las poblaciones de ambas especies son positivas (coexistencia mutua). Las únicas soluciones que se aproximan al punto de equilibrio (0, 3/2), son aquellas sobre el eje  $y$ .



**Figura 5.18**  
Nulclinales para el sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2x \left(1 - \frac{x}{2}\right) - xy \\ \frac{dy}{dt} &= y \left(\frac{9}{4} - y^2\right) - x^2y. \end{aligned}$$

Las nulclinales separan el primer cuadrante en cinco regiones.

**Figura 5.19**

Plano fase para el sistema de especies en competencia con las gráficas  $x(t)$  y  $y(t)$  para las soluciones indicadas.

Por otra parte, hay un conjunto grande de condiciones iniciales que dan soluciones cercanas al punto de equilibrio  $(2, 0)$ , donde la especie  $y$  está extinta y la  $x$  está en su capacidad de soporte.

## Cómo emplear todas nuestras herramientas

Considere el sistema

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x + y - x^3 \\ \frac{dy}{dt} &= -0.5x.\end{aligned}$$

En el estudio de las células nerviosas aparecen sistemas de esta forma. Haciendo una analogía, la variable  $x(t)$  representa el voltaje a través de la frontera de una célula nerviosa en el tiempo  $t$ , y  $y(t)$  simboliza la permeabilidad de la pared de la célula en el tiempo  $t$ . Un cambio rápido en  $x$  corresponde a la célula nerviosa “disparando”.

### Información obtenida a partir de las nulclinales

La nulclinal  $x$  para este sistema es  $y = -x + x^3$ . Arriba de esta curva, la componente  $x$  del campo vectorial es positiva y debajo es negativa. Por consiguiente, arriba de la nulclinal

$x$  las soluciones se mueven hacia la derecha, y abajo se desplazan hacia la izquierda. La nulclinal  $y$  es la línea  $x = 0$ , es decir el eje  $y$ . A la derecha de ésta tenemos  $dy/dt < 0$  y a la izquierda tenemos  $dy/dt > 0$ . Por consiguiente, en la mitad derecha del plano fase las soluciones se mueven hacia abajo, y en la mitad izquierda del plano las soluciones se recorren hacia arriba (vea la figura 5.20). Las nulclinales  $x$  y  $y$  dividen el plano fase en cuatro regiones. Usando el análisis cualitativo anterior, podemos concluir que todas las soluciones deben circular siguiendo el sentido de las manecillas del reloj alrededor del origen, que es el único punto de equilibrio del sistema (vea la figura 5.21).

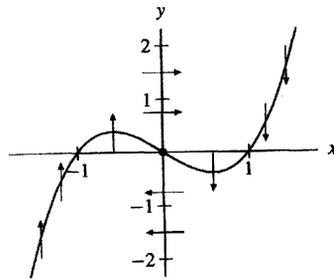
**Información obtenida a partir de la linealización**

El sistema linealizado en el origen es

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x + y \\ \frac{dy}{dt} &= -0.5x, \end{aligned}$$

que tiene los eigenvalores  $(1 \pm i)/2$ . Por tanto, el origen es una fuente espiral.

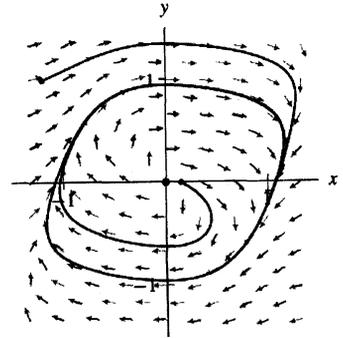
Este análisis es aplicable sólo cerca del origen. Como el término que cancelamos para obtener la linealización es  $-x^3$ , la aproximación lineal ya no es válida una vez que este término tiene tamaño significativo. Cuando la magnitud de  $x^3$  es comparable a  $x$ , no es seguro usar la linealización para estudiar el sistema no lineal.



**Figura 5.20**  
Las nulclinales  $x$  y  $y$  para el sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x + y - x^3 \\ \frac{dy}{dt} &= -0.5x. \end{aligned}$$

Las nulclinales para este sistema separan el plano en cuatro regiones.



**Figura 5.21**  
Soluciones del sistema

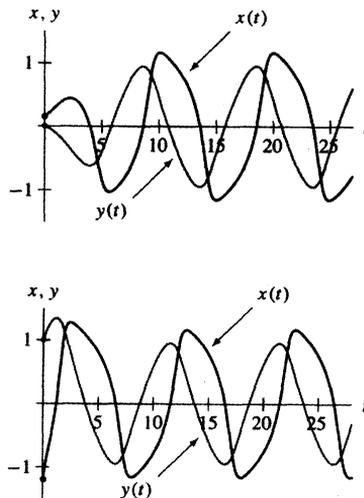
$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x + y - x^3 \\ \frac{dy}{dt} &= -0.5x. \end{aligned}$$

Observe que las soluciones con condiciones iniciales cerca del origen se desplazan en espiral hacia afuera, mientras que aquellas con condiciones iniciales lejos del origen se mueven en espiral hacia adentro.

### Información obtenida a partir de las aproximaciones numéricas de las soluciones

Para tener una idea más detallada del comportamiento de las soluciones de este sistema, usamos métodos numéricos para calcularlas. De la linealización sabemos que las condiciones iniciales cerca del origen dan soluciones que se mueven en espiral hacia afuera. Si tomamos una condición inicial lejos del origen, los métodos numéricos muestran que la solución se desplaza en espiral hacia adentro.

Del teorema de unicidad sabemos que las curvas solución nunca se cruzan. Por consiguiente, las soluciones que se inician cerca del origen al final cesan su movimiento en espiral hacia afuera; de otra manera, cruzarían a las soluciones que se mueven en espiral hacia adentro. Entre las soluciones con desplazamiento en espiral hacia afuera o hacia adentro, debe haber por lo menos una solución que no se mueva en espiral ni hacia adentro ni hacia afuera. Esta solución es periódica. La evidencia numérica indica que sólo una posee esta característica y que todas las otras soluciones (excepto la de equilibrio en el origen) se mueven en espiral hacia esta solución periódica. En la figura 5.22 se muestran las gráficas  $x(t)$  y  $y(t)$  de dos soluciones. De este retrato vemos que ambas convergen hacia el mismo tipo de comportamiento periódico.



**Figura 5.22**

Las gráficas  $x(t)$  y  $y(t)$  para dos soluciones del sistema

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x + y - x^3 \\ \frac{dy}{dt} &= -0.5x.\end{aligned}$$

La condición inicial para la primera solución está cerca del origen, mientras que para la segunda se encuentra fuera de la curva solución asociada a la solución periódica. Note que ambas gráficas indican que esas dos soluciones se comportan de la misma manera a largo plazo.

### Caja de herramientas matemáticas

En esta sección hemos analizado tres sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden usando procedimientos analíticos, cualitativos y numéricos. Como hemos visto, este análisis es mucho más difícil que el análisis de ecuaciones diferenciales con una sola variable dependiente. Necesitamos muchos tipos diferentes de métodos para tratar sistemas, y debemos estar dispuestos a usar el que sea apropiado. Como en cualquier oficio, la habilidad para escoger la herramienta adecuada para determinado problema es una habilidad crucial.

## EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 5.2

En los ejercicios 1-3, esboce las nulclinales  $x$  y  $y$  de los sistemas especificados. Usando la dirección del campo vectorial entre las nulclinales, describa el posible destino de las curvas solución correspondientes a las condiciones iniciales (a), (b) y (c).

$$1. \quad \frac{dx}{dt} = 2 - x - y$$

$$\frac{dy}{dt} = y - x^2$$

$$(a) \quad x_0 = 2, y_0 = 1$$

$$(b) \quad x_0 = 0, y_0 = -1$$

$$(c) \quad x_0 = 0, y_0 = 0$$

$$2. \quad \frac{dx}{dt} = 2 - x - y$$

$$\frac{dy}{dt} = y - |x|$$

$$(a) \quad x_0 = -1, y_0 = 1$$

$$(b) \quad x_0 = 2, y_0 = 1$$

$$(c) \quad x_0 = 2, y_0 = 2$$

$$3. \quad \frac{dx}{dt} = x(x - 1)$$

$$\frac{dy}{dt} = x^2 - y$$

$$(a) \quad x_0 = -1, y_0 = 0$$

$$(b) \quad x_0 = 0.8, y_0 = 0$$

$$(c) \quad x_0 = 1, y_0 = 3$$

4. Considere el sistema Volterra-Lotka, que es un modelo de dos especies en competencia,

$$\frac{dx}{dt} = x(-Ax - By + C)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(-Dx - Ey + F)$$

donde  $x, y \geq 0$  y donde los parámetros  $A - F$  son todos positivos.

- (a) ¿Puede haber más de un punto de equilibrio para el cual  $x > 0$  y  $y > 0$  (es decir, donde las especies “coexistan en equilibrio”)? Si es así, dé un ejemplo de tales valores de  $A$  a  $F$ . Si no, ¿por qué no?
- (b) ¿Qué condición sobre los parámetros  $A$  a  $F$  garantiza que hay por lo menos un punto de equilibrio con  $x > 0$  y  $y > 0$ ?

En los ejercicios 5-14, restringimos la atención al primer cuadrante ( $x, y \geq 0$ ). Para cada sistema,

- (a) esboce las nulclinales,  
 (b) bosqueje el plano fase, y  
 (c) en un párrafo breve describa los posibles comportamientos de las soluciones. [Sugerencia: Use la información obtenida en los ejercicios 7-16 de la sección 5.1.]

$$5. \quad \frac{dx}{dt} = x(-x - 3y + 150)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(-2x - y + 100)$$

$$7. \quad \frac{dx}{dt} = x(100 - x - 2y)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(150 - x - 6y)$$

$$6. \quad \frac{dx}{dt} = x(10 - x - y)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(30 - 2x - y)$$

$$8. \quad \frac{dx}{dt} = x(-x - y + 100)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(-x^2 - y^2 + 2500)$$

$$9. \quad \frac{dx}{dt} = x(-x - y + 40)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(-x^2 - y^2 + 2500)$$

$$11. \quad \frac{dx}{dt} = x(-8x - 6y + 480)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(-x^2 - y^2 + 2500)$$

$$13. \quad \frac{dx}{dt} = x(2 - x - y)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(y - x)$$

$$10. \quad \frac{dx}{dt} = x(-4x - y + 160)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(-x^2 - y^2 + 2500)$$

$$12. \quad \frac{dx}{dt} = x(2 - x - y)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(y - x^2)$$

$$14. \quad \frac{dx}{dt} = x(x - 1)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(x^2 - y)$$

15. El sistema Volterra-Lotka de ecuaciones diferenciales para especies en competencia es

$$\frac{dx}{dt} = x(-Ax - By + C)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(-Dx - Ey + F),$$

donde  $x, y \geq 0$  y ninguno de los parámetros  $A-F$  son negativos.

Algunas especies viven de manera “cooperativa”, es decir, cada especie ayuda a la otra a sobrevivir y prosperar (por ejemplo, las flores y las abejas).

(a) ¿Cómo alteraría usted el sistema Volterra-Lotka descrito antes para dar una forma general a un conjunto de sistemas que modelen especies cooperativas?

(b) ¿Qué aspecto tienen las nulclinales para su sistema cooperativo? ¿Hay tres puntos de equilibrio? ¿Hay condiciones sobre los parámetros que garanticen que hay puntos de equilibrio con  $x$  y  $y$  positivas?

Los ejercicios 16-20 se refieren a los modelos de las reacciones químicas creadas en los ejercicios 25-30 de la sección 2.1. Aquí  $a(t)$  es la cantidad de sustancia  $A$  en una solución y  $b(t)$  es la cantidad de sustancia  $B$  en una solución en el tiempo  $t$ . Sólo tenemos que considerar  $a(t)$  y  $b(t)$  no negativas.

Para cada sistema,

(a) esboce las nulclinales y dibuje el campo vectorial a lo largo de éstas;

(b) en el plano fase, marque las regiones  $ab$  creadas por las nulclinales y determine en qué dirección general señala el campo vectorial en cada región (es decir, creciente o decreciente  $a$ , creciente o decreciente  $b$ ), y

(c) identifique las regiones de las que las soluciones no pueden salir y determine el destino de las soluciones en esas regiones cuando pasa el tiempo.

$$16. \quad \frac{da}{dt} = -\frac{ab}{2}$$

$$\frac{db}{dt} = -\frac{ab}{2}$$

$$17. \quad \frac{da}{dt} = 2 - \frac{ab}{2}$$

$$\frac{db}{dt} = \frac{3}{2} - \frac{ab}{2}$$

$$18. \frac{da}{dt} = 2 - \frac{ab}{2} - \frac{a^2}{3}$$

$$\frac{db}{dt} = \frac{3}{2} - \frac{ab}{2}$$

$$20. \frac{da}{dt} = 2 - \frac{ab}{2} - \frac{2ab^2}{3}$$

$$\frac{db}{dt} = \frac{3}{2} - \frac{ab}{2} - \frac{ab^2}{3}$$

$$19. \frac{da}{dt} = 2 - \frac{ab}{2} + \frac{b^2}{3}$$

$$\frac{db}{dt} = \frac{3}{2} - \frac{ab}{2} - \frac{b^2}{3}$$

Los ejercicios 21-23 se refieren al sistema

$$\frac{dx}{dt} = y$$

$$\frac{dy}{dt} = x - x^2.$$

21. Esboce las nulclinales y encuentre la dirección del campo vectorial a lo largo de éstas.
22. Demuestre que por lo menos existe una solución en cada uno de los cuadrantes segundo y cuarto que tienden al origen cuando  $t \rightarrow \infty$ . Compruebe lo mismo para los cuadrantes primero y tercero, pero la solución tiende al origen cuando  $t \rightarrow -\infty$ .
23. Encuentre el sistema linearizado cerca de los puntos de equilibrio  $(0, 0)$  y  $(1, 0)$ . Use la información obtenida de los sistemas linearizados y de los ejercicios 21 y 22 para describir el plano fase. ¿Cuáles son sus dudas acerca del plano fase?

## 5.3 SISTEMAS HAMILTONIANOS

Como hemos recalcado varias veces, los sistemas no lineales de ecuaciones diferenciales son casi imposible de resolver explícitamente. También hemos visto que las curvas solución de los sistemas pueden comportarse de muchas maneras diferentes y que no hay procedimientos cualitativos que funcionen en todos los casos. Afortunadamente, hay ciertos tipos de sistemas no lineales que aparecen a menudo en la práctica, y para los que existen procedimientos especiales que nos permiten entender en alguna medida el plano fase. En ésta y en la siguiente sección analizaremos dos de esos tipos especiales de sistemas no lineales. Pero primero haremos una pausa para oír una pequeña historia.

### Cómo nació este libro

Pablo y Genaro han estado escribiendo un libro de texto sobre ecuaciones diferenciales durante los últimos diez años. Quieren que su libro esté lleno de ideas nuevas, ingeniosas y brillantes sobre las ecuaciones diferenciales, pero han encontrado que resulta muy difícil aportar nuevas ideas.

Más problemático para ellos es la siguiente observación que han hecho a lo largo de los años. Siempre que Pablo llega a la oficina en la mañana con una idea nueva e ingeniosa, ambos trabajan asiduamente en ella, pero por lo general no fructifica. Entonces su entusiasmo decrece, y con ello su creatividad. Por otra parte, siempre que Genaro llega en la mañana con una nueva idea, sin importar qué tan trivial sea ésta, sucede algo diferente. Ambos trabajan en la idea arduamente. Algunas veces el entusiasmo de Pablo decrece,

pero Genaro siempre está animado. Hay un buen intercambio y nunca cesan de trabajar. Algo resulta de la idea y el libro progresa. Esto es lo que molesta a Pablo y a Genaro. ¿Por qué debe depender tan críticamente su energía creativa de quién tuvo la primera idea? Ellos deciden modelar su aprieto con un sistema de ecuaciones diferenciales.

Sean  $x(t)$  y  $y(t)$  los niveles de entusiasmo de Genaro y Pablo en el tiempo  $t$ , respectivamente. Sin embargo,  $x(t)$  y  $y(t)$  son difíciles de medir debido a una falta de unidades estandarizadas de entusiasmo; pero es claro que  $y(t) > 0$  indica que Pablo es entusiasta, mientras que  $y(t) < 0$  significa que Pablo es apático. Cuando  $y(t) = 0$ , Pablo permanece sentado, ni feliz ni triste, y lo mismo ocurre para Genaro.

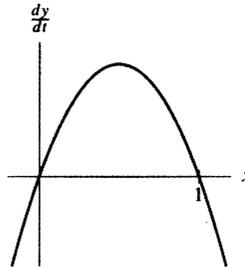
Ambos han observado que el ánimo de Genaro cambia a una razón directamente proporcional al nivel de entusiasmo de Pablo. Cuando Pablo está emocionado, Genaro se vuelve más entusiasta, pero cuando Pablo está apático, Genaro pierde su energía. Una simple ecuación que refleja este comportamiento es

$$\frac{dx}{dt} = y.$$

La situación de Pablo es un poco más difícil de categorizar. Cuando Genaro está medianamente entusiasta, Pablo se pone contento. Pero cuando Genaro está sumamente emocionado, Pablo empieza a perder entusiasmo. Aparentemente, cuando el torrente de ideas que emanan de Genaro se vuelve muy grande, a Pablo le da dolor de cabeza y se aísla de su amigo. Por otra parte, cuando Genaro está deprimido, Pablo se pone realmente apático. Entonces, para la razón de cambio del entusiasmo de Pablo usamos

$$\frac{dy}{dt} = x - x^2.$$

La gráfica de  $dy/dt = x - x^2$  como función de  $x$  refleja de manera exacta el nivel de entusiasmo de Pablo (vea la figura 5.23). Podemos ver que  $dy/dt > 0$  si  $0 < x < 1$ , pero se tendrá  $dy/dt < 0$  de otro modo.



**Figura 5.23**

La gráfica de  $dy/dt = x - x^2$  como función de  $x$ .

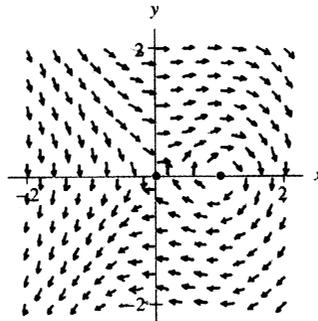
El sistema de ecuaciones diferenciales en el que concuerdan es

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= x - x^2. \end{aligned}$$

El campo de direcciones para este sistema se muestra en la figura 5.24. Hay dos puntos de equilibrio, uno en el origen y otro en  $x = 1, y = 0$ . El procedimiento de linealización de la sección 5.1 puede usarse para estudiar las soluciones cerca de los puntos de equilibrio. En el origen, la matriz jacobiana es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

que tiene los eigenvalores  $\pm 1$ . Por tanto, el origen es un punto silla.



**Figura 5.24**

El campo de direcciones para

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= x - x^2. \end{aligned}$$

El sistema tiene dos puntos de equilibrio y por linealización sabemos que el punto de equilibrio en el origen es un punto silla.

El punto de equilibrio en  $(x, y) = (1, 0)$  tiene como matriz jacobiana

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

que tiene los eigenvalores  $\pm i$ . El sistema linealizado es un centro. Como vimos en la sección 5.1, éste es uno de los casos en que el comportamiento a largo plazo de las soluciones del sistema no lineal cerca del punto de equilibrio no queda completamente determinado por la linealización. El comportamiento del sistema no lineal cerca del punto de equilibrio  $(1, 0)$  podría ser el de un sumidero espiral, el de una fuente espiral o el de un centro.

Las aproximaciones numéricas de las soluciones dan el plano fase mostrado en la figura 5.25, donde puede observarse un comportamiento muy regular. Las soluciones con condiciones iniciales cerca de  $(1, 0)$  parecen formar lazos cerrados correspondientes a soluciones periódicas. También las separatrices inestables y estables que emergen del punto silla en el origen y se dirigen a los cuadrantes primero y cuarto parecen formar un solo lazo.

Los procedimientos cualitativos que hemos estudiado hasta ahora no nos permiten predecir que este sistema tendrá tales curvas soluciones regulares. Además, ya que las aproximaciones numéricas de las soluciones sólo son eso, debemos ser cautos. Distinguir las curvas solución que forman lazos cerrados de aquellas que se mueven en espiral muy lentamente puede ser muy difícil. Nos gustaría tener procedimientos que pudieran usarse para verificar el comportamiento especial de este sistema.

### Cantidades que se conservan

Pablo y Genaro estaban tan intrigados por el comportamiento de su sistema que decidieron mostrarlo a Roberto. Él exclamó que antes había visto este sistema y que tenía una cantidad que se conservaba. Notando la confusión manifiesta en Pablo y Genaro, explicó:

**DEFINICIÓN** Una función de valor real  $H(x, y)$  de dos variables  $x$  y  $y$  es una **cantidad conservada** para un sistema de ecuaciones diferenciales, si  $H$  es constante a lo largo de todas las curvas solución del sistema. Es decir, si  $(x(t), y(t))$  es una solución del sistema, entonces  $H(x(t), y(t))$  es constante. En otras palabras,

$$\frac{d}{dt}H(x(t), y(t)) = 0. \quad \blacksquare$$

Roberto recordó que

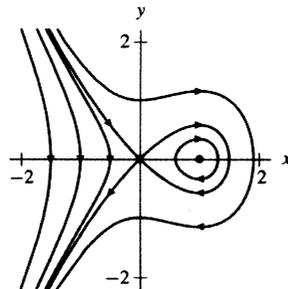
$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

es una cantidad conservada para el sistema en consideración. Para comprobarlo, suponga que  $(x(t), y(t))$  es una solución del sistema. Calculamos entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H(x(t), y(t)) &= \frac{\partial H}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \\ &= (-x + x^2) \cdot y + y \cdot (x - x^2) \\ &= 0, \end{aligned}$$

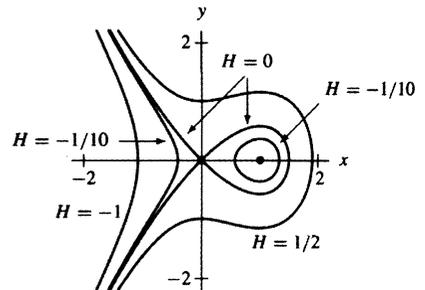
donde la primera igualdad proviene de la regla de la cadena, y la segunda parte del hecho de que  $(x(t), y(t))$  es una solución para reemplazar  $dx/dt$  por  $y$  y  $dy/dt$  por  $x - x^2$ .

Esto significa que las curvas solución siempre se encuentran a lo largo de las curvas de nivel de  $H$ , las cuales se muestran en la figura 5.26. Ahí podemos observar que alrededor del punto de equilibrio  $(1, 0)$ , las curvas de nivel de  $H$  forman círculos cerrados y que



**Figura 5.25**  
El plano fase del sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= x - x^2. \end{aligned}$$

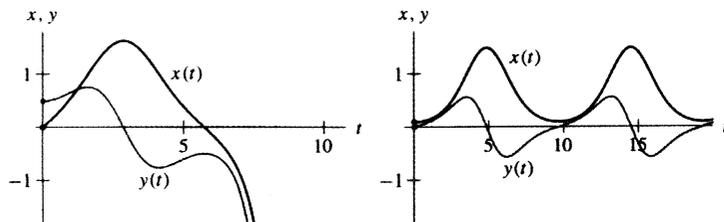


**Figura 5.26**  
Las curvas de nivel de  $H$ . Compare las curvas solución mostradas en la figura 5.25 contra éstas.

las ramas de la curva de nivel, que sale del origen hacia la derecha, se conectan en un lazo. Esto concuerda con nuestro análisis del plano fase para el sistema (vea la figura 5.25).

Es muy especial el hecho de que las ramas derechas de las separatrices estable e inestable del origen formen un solo lazo. Este tipo de curvas solución es una **conexión de punto silla**. Dentro de la conexión del punto silla, todas las curvas solución son periódicas; pero fuera de ella, todas las soluciones tienen la propiedad de que tanto  $x(t)$  como  $y(t)$  tienden a  $-\infty$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Esto explica, para gran alivio de Pablo y Genaro, por qué su productividad diaria depende tan crucialmente de quién tiene la primera idea. Si  $y(0) > 0$  pero  $x(0) = 0$ , la curva solución tiende al final a  $x = y = -\infty$ . Pero si  $x(0) > 0$ ,  $y(0) = 0$  [con  $x(0)$  no muy grande], entonces  $x(t)$  y  $y(t)$  son periódicas, con  $x(t) > 0$  para toda  $t$ . En la figura 5.27 están esbozadas las gráficas de  $x(t)$  y  $y(t)$  para condiciones iniciales cercanas a  $(0, 0)$ .

Ésta fue una causa de satisfacción tan grande para Pablo y Genaro que invitaron a Roberto a ser coautor de su libro. Roberto aceptó a regañadientes, pero sólo después de que Genaro y Pablo prometieron escuchar la ópera *Las bodas de Fígaro* completa.



**Figura 5.27**

Gráficas de  $x(t)$  y  $y(t)$  para soluciones con condiciones iniciales  $y(0) > 0$ ,  $x(0) = 0$  y  $y(0) = 0$ ,  $0 < x(0) < 1$ .

## Sistemas hamiltonianos

Lo que hace funcionar el análisis precedente es el hecho de que el sistema de ecuaciones diferenciales que modela los niveles de entusiasmo de Genaro y Pablo es un tipo especial llamado sistema hamiltoniano (en honor del matemático irlandés William Rowan Hamilton [1805-1865]).

**DEFINICIÓN** Un sistema de ecuaciones diferenciales se llama **sistema hamiltoniano** si existe una función real  $H(x, y)$  tal que

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial y} \\ \frac{dy}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x}\end{aligned}$$

para toda  $x$  y  $y$ . La función  $H$  se llama la **función hamiltoniana** para el sistema. ■

Note que  $H$  es una cantidad que siempre se conserva para un sistema como éste. Podemos verificar lo anterior si consideramos que  $(x(t), y(t))$  es cualquier solución del sistema. Entonces

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}H(x(t), y(t)) &= \frac{\partial H}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \\ &= \frac{\partial H}{\partial x} \left( \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \frac{\partial H}{\partial y} \left( -\frac{\partial H}{\partial x} \right) \\ &= 0.\end{aligned}$$

La primera igualdad es la regla de la cadena y la segunda aplica el hecho de que el sistema es hamiltoniano y que  $(x(t), y(t))$  es una solución para reemplazar  $dx/dt$  por  $\partial H/\partial y$  y  $dy/dt$  por  $-\partial H/\partial x$ .

Entonces, igual que antes, las curvas solución del sistema se encuentran a lo largo de las curvas de nivel de  $H$ . Esbozar el plano fase para un sistema hamiltoniano es lo mismo que dibujar los conjuntos de nivel de la función hamiltoniana.

### Ejemplos de sistemas hamiltonianos: el oscilador armónico

Recuerde que el sistema del oscilador armónico no amortiguado es

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= -qy,\end{aligned}$$

donde  $q$  es un constante positiva. Si hacemos

$$H(y, v) = \frac{1}{2}v^2 + \frac{q}{2}y^2,$$

entonces

$$\frac{dy}{dt} = v = \frac{\partial H}{\partial v}$$

y

$$\frac{dv}{dt} = -qy = -\frac{\partial H}{\partial y}.$$

Por tanto el sistema del oscilador armónico no amortiguado es un sistema hamiltoniano. Los conjuntos de nivel de la función  $H$  son elipses en el plano  $y$ - $v$  que corresponden al retrato del plano fase de las soluciones del oscilador armónico no amortiguado (vea la sección 3.4). Esta función hamiltoniana también se denomina la **función de energía** para el oscilador.

### El péndulo no lineal

Consideremos un péndulo hecho de una barra rígida ligera, cuya longitud es  $l$  con una bola en un extremo de masa  $m$ . La bola se llama *lentejuela* y la barra rígida se llama *el brazo* del péndulo. Suponemos que toda la masa del péndulo está en la lentejuela, despreciándose la masa de la barra. El otro extremo de la barra rígida está unida a la pared, de manera que ésta puede girar un círculo entero en un plano perpendicular al suelo. La posición de



**Figura 5.28**  
Un péndulo  
con longitud de barra  
 $l$  y ángulo  $\theta$ .

la lentejuela en el tiempo  $t$  está dada por un ángulo  $\theta(t)$ , que escogemos medir en sentido contrario al de las manecillas del reloj con  $\theta = 0$  correspondiente al eje vertical dirigido hacia abajo (vea la figura 5.28).

Suponemos que sólo hay dos fuerzas actuando sobre el péndulo: la gravedad y la fricción. La fuerza gravitatoria constante, igual a  $mg$ , actúa hacia abajo, donde  $g$  es la aceleración de la gravedad cerca de la Tierra ( $g \approx 9.8 \text{ m/s}^2$ ). Sólo la componente de esta fuerza,  $-mg \sin \theta$ , tangente al círculo de movimiento, afecta el movimiento del péndulo (vea la figura 5.29). También hay una fuerza debido a la fricción, que suponemos proporcional a la velocidad de la lentejuela.

La posición de la lentejuela en el tiempo  $t$  está dada por el punto  $(l \sin \theta(t), -l \cos \theta(t))$  sobre el círculo de radio  $l$  (recuerde que  $\theta = 0$  corresponde a la vertical hacia abajo). La rapidez de la lentejuela es la longitud del vector velocidad, que es  $l d\theta/dt$ . La componente de la aceleración que señala la dirección del movimiento de la lentejuela tiene longitud  $l d^2\theta/dt^2$ . La fuerza debida a la fricción es proporcional a la velocidad, y está representada por  $-b(l d\theta/dt)$ , donde  $b > 0$  es un parámetro que corresponde al *coeficiente de amortiguamiento*.

Si combinamos lo anterior con la ley de Newton: “la fuerza es igual a la masa multiplicada por la aceleración”, encontramos la ecuación del movimiento,

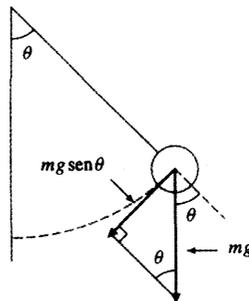
$$ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = -bl \frac{d\theta}{dt} - mg \sin \theta$$

o

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0.$$

Podemos escribirla como un sistema no lineal en la manera usual haciendo la velocidad  $v = d\theta/dt$ . La ecuación se convierte entonces en

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{b}{m}v - \frac{g}{l} \sin \theta. \end{aligned}$$



**Figura 5.29**

Descomposición de la fuerza de gravedad en componentes a lo largo del brazo del péndulo y tangente al círculo de movimiento de la lentejuela del péndulo.

Recuerde que  $\theta$  es una variable angular, por lo que  $\theta = 0$ ,  $\theta = 2\pi$ ,  $\theta = 4\pi$ , etc., miden la misma posición del péndulo cuando éste pasa por su posición más baja. Los valores  $\theta = \pi$ ,  $3\pi$ ,  $5\pi$ , etc., se presentan cuando el péndulo está en el punto más alto de su movimiento circular.

### El péndulo ideal

En la práctica siempre hay una fuerza debido a la fricción actuando sobre un péndulo. Sin embargo, de momento supongamos que en este modelo no hay fricción. Es un caso "ideal" que no ocurre en el mundo real. Pero se trata de un modelo bastante razonable para un péndulo bien construido y bien lubricado.

Cuando no hay fricción presente, el coeficiente  $b$  desaparece. Por conveniencia, digamos que la longitud del brazo del péndulo es unitaria; es decir, suponemos  $l = 1$ . (En los ejercicios consideramos el efecto de ajustar dicha longitud.) Las ecuaciones de movimiento del péndulo ideal con brazo de longitud unitaria son

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= -g \operatorname{sen}\theta.\end{aligned}$$

El primer paso es encontrar los puntos de equilibrio. De la primera ecuación debemos tener  $v = 0$  y de la segunda  $\operatorname{sen}\theta = 0$ , de modo que  $v = 0$ ,  $\theta = n\pi$ , donde  $n$  es cualquier entero, todos dan puntos de equilibrio. Cuando  $\theta$  es un múltiplo par de  $\pi$  y  $v = 0$ , la lentejuela cuelga sin movimiento en posición vertical, que corresponde al equilibrio para el péndulo. Cuando  $\theta$  es un múltiplo impar de  $\pi$  y  $v = 0$ , se tiene también una posición de reposo en la que la lentejuela está perfectamente equilibrada en una posición vertical. Este tipo de equilibrio es difícil de ver en la práctica: justo cuando se ha logrado equilibrar al péndulo, algo se mueve y la corriente de aire resultante perturba la posición de equilibrio del péndulo, poniéndolo en movimiento en una u otra dirección.

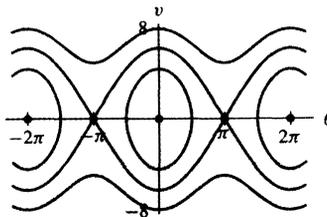
Ahora expondremos un método para determinar cuándo tratamos con un sistema hamiltoniano, y en cualquier caso mostramos cómo calcularlo. De momento usaremos el método del prestidigitador y afirmamos que las ecuaciones diferenciales para el péndulo ideal forman un sistema hamiltoniano, con la función hamiltoniana dada por

$$H(\theta, v) = \frac{1}{2}v^2 - g \cos\theta.$$

Esto proviene del cálculo de las derivadas parciales de  $H$ ,

$$\frac{\partial H}{\partial \theta} = g \operatorname{sen}\theta = -\frac{dv}{dt}, \quad \frac{\partial H}{\partial v} = v = \frac{d\theta}{dt}.$$

Podemos describir la gráfica de la función  $H$  como sigue: para cada  $\theta$  fija, el término  $v^2/2$  implica que la gráfica de  $H$  es una parábola en la dirección de  $v$ . Los puntos críticos ocurren en  $v = 0$ ,  $g \operatorname{sen}\theta = 0$  o  $\theta = 0, \pm\pi, \pm 2\pi$ , etc. Los puntos  $v = 0$ ,  $\theta = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi$ , etc., son mínimos locales, y  $v = 0$ ,  $\theta = \pm\pi, \pm 3\pi$ , etc., son puntos silla de la gráfica.

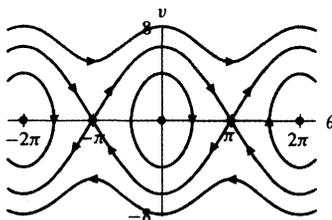


**Figura 5.30**  
Curvas de nivel para el péndulo ideal.

Las curvas de nivel de  $H$  están graficadas en la figura 5.30. Sabemos que el campo vectorial siempre es tangente a esas curvas. La componente  $\theta$  es igual a  $v$ , por lo que el campo vectorial señala hacia la derecha cuando  $v > 0$ , y hacia la izquierda cuando  $v < 0$ . Si aplicamos esto, podemos asignar direcciones a lo largo de esas curvas y con ello determinar el retrato de fase. Éste se muestra en la figura 5.31.

Hay tres tipos diferentes de curvas solución presentes en el retrato del plano fase. Se muestran esquemáticamente en la figura 5.32 y están marcados como A, B y C. Alrededor de los puntos de equilibrio en  $v = 0$ ,  $\theta = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi$ , etc., encontramos soluciones periódicas que se mueven en el mismo sentido que las manecillas del reloj. Ésas son las soluciones tipo A en la figura 5.32. Como el valor  $\theta$  a lo largo de esas curvas solución nunca alcanza los valores  $\pi, 3\pi$ , etc., se infiere que el péndulo nunca pasa por la posición vertical. En consecuencia, lo único que hace es oscilar de ida y vuelta periódicamente con los valores máximo y mínimo de  $\theta$ , determinados por el punto donde la curva solución cruza el eje  $\theta$ . Éste es el movimiento usual que asociamos con un péndulo. La gráfica de  $\theta(t)$  para tal solución como ésta se muestra en la figura 5.33.

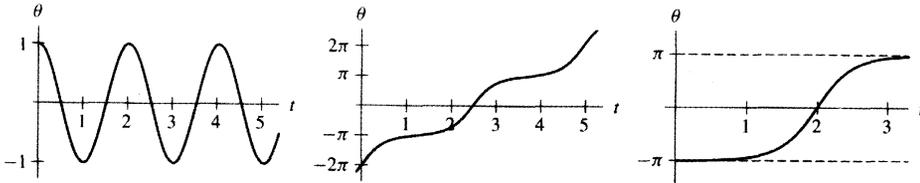
Por otra parte, una curva solución como la B en la figura 5.32 corresponde al péndulo girando para siempre en sentido contrario a las manecillas. Note que  $v \neq 0$  a lo largo de dicha curva solución, por lo que el péndulo nunca alcanza un punto donde su velocidad sea 0. La gráfica de  $\theta(t)$  para tal solución se incrementa para toda  $t$  si  $v > 0$ , y decrece para toda  $t$  si  $v < 0$  (vea la figura 5.33).



**Figura 5.31**  
Plano fase para el péndulo ideal.



**Figura 5.32**  
Soluciones especiales para las ecuaciones del péndulo.

**Figura 5.33**

Gráficas de  $\theta(t)$  para los tres tipos diferentes de soluciones representadas en la figura 5.32.

Los tipos intermedios de soluciones (vea el punto C en la figura 5.32) son separatrices de puntos silla que forman conexiones de punto silla. Esas soluciones provienen de y se aproximan a la posición vertical de equilibrio cuando el tiempo tiende a  $\pm\infty$ . La gráfica  $\theta(t)$  de este tipo de solución se muestra en la figura 5.33. Para encontrarla, debemos escoger con cuidado el ángulo y velocidad iniciales. Con una velocidad inicial levemente alta, el péndulo oscila más allá de la posición vertical; cuando es ligeramente baja, el péndulo cae de regreso. Las separatrices de los puntos de equilibrio de punto silla separan las soluciones “oscilantes”, de ida y vuelta, de las soluciones “rotatorias”, que giran una y otra vez.

El valor de la función hamiltoniana para el péndulo ideal en un punto particular  $(y, v)$  se llama la **energía**. El principio físico de la conservación de la energía es aplicable al péndulo ideal, como lo es para el oscilador armónico sin amortiguamiento. Ésta es una manera de predecir que el oscilador armónico sin amortiguamiento y el péndulo ideal son sistemas hamiltonianos. A continuación damos un enfoque más matemático.

## Determinación de los sistemas hamiltonianos

Los sistemas hamiltonianos son tipos especiales de ecuaciones diferenciales en varios sentidos. Como hemos visto, podemos “resolver” este tipo de sistema en el plano desde un punto de vista cualitativo, una vez que conocemos la función hamiltoniana. Sólo tenemos que trazar las curvas de nivel de  $H$  y esbozar las direcciones para determinar el retrato fase. Desafortunadamente, estos sistemas son bastante raros. Nos gustaría determinar si el sistema de ecuaciones siguiente es o no hamiltoniano y, si lo es, calcular la función hamiltoniana.

Suponga que tenemos

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y)\end{aligned}$$

y queremos ver si es hamiltoniano. Nos preguntamos si existe una función  $H(x, y)$  que para todo  $(x, y)$ ,

$$f(x, y) = \frac{\partial H}{\partial y}(x, y)$$

y

$$g(x, y) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y).$$

Si existe la función  $H$  (y tiene segundas derivadas continuas), entonces

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x}.$$

Por tanto, si el sistema es hamiltoniano,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial g}{\partial y}.$$

Es decir, para comprobarlo, calculamos  $\partial f/\partial x$  y  $\partial g/\partial y$  y revisamos si  $\partial f/\partial x = -\partial g/\partial y$ . Si esta ecuación no se cumple para todo  $(x, y)$ , entonces el sistema no es hamiltoniano.

Por ejemplo, consideremos el sistema no lineal

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y) = x + y^2 \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y) = y^2 - x.\end{aligned}$$

Calculamos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 \neq -2y = -\frac{\partial g}{\partial y}.$$

En consecuencia, este sistema no es hamiltoniano.

### Construcción de funciones hamiltonianas

Para el sistema

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y),\end{aligned}$$

si

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial y},$$

el sistema es hamiltoniano. Podemos verificarlo construyendo la función hamiltoniana como sigue: si vamos a tener

$$f(x, y) = \frac{\partial H}{\partial y}(x, y),$$

entonces al integrar ambos lados de esta ecuación con respecto a  $y$ , nos debe quedar

$$H(x, y) = \int f(x, y) dy$$

hasta una "constante de integración" que puede depender de  $x$ . Es decir, podemos escribir

$$H(x, y) = \int f(x, y) dy + \phi(x),$$

donde  $\phi$  es alguna función de  $x$  que debe determinarse. Para encontrar  $\phi$ , simplemente diferenciamos  $H(x, y)$  con respecto a  $x$  e igualamos el resultado con  $-g(x, y)$ . Encontramos

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int f(x, y) dy + \phi'(x) = -g(x, y).$$

Es decir,

$$\phi'(x) = -g(x, y) - \frac{\partial}{\partial x} \int f(x, y) dy.$$

La integración del lado derecho con respecto a  $x$  determina entonces a  $\phi$  y en consecuencia al hamiltoniano  $H$ .

### Dos ejemplos

Recuerde el sistema de ecuaciones diferenciales que gobierna el dilema de la escritura del libro de Genaro y Pablo:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y) = y \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y) = x - x^2. \end{aligned}$$

Como

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 = -\frac{\partial g}{\partial y},$$

sabemos que este sistema es hamiltoniano. Para encontrar  $H$ , integramos  $f$  con respecto a  $y$  y encontramos

$$H(x, y) = \int y dy = \frac{1}{2}y^2 + \phi(x).$$

A continuación debemos tener

$$\begin{aligned} x - x^2 &= -\frac{\partial H}{\partial x} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2}y^2 + \phi(x) \right) \\ &= -\phi'(x). \end{aligned}$$

Integrando  $\phi'(x) = -x + x^2$  con respecto a la variable  $x$ , encontramos

$$\phi(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3,$$

por lo que

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3.$$

Ésta es exactamente la función que encontramos antes. Por supuesto, podríamos agregar una constante arbitraria a  $H$ , pero esto no cambiaría la forma de las curvas de nivel de  $H$ .

Como otro ejemplo, considere el sistema

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y) = -x \operatorname{sen} y + 2y \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y) = -\cos y.\end{aligned}$$

Éste es hamiltoniano ya que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\operatorname{sen} y = -\frac{\partial g}{\partial y}$$

para todo  $(x, y)$ . Integramos entonces primero  $f$  con respecto a  $y$ , y encontramos

$$H(x, y) = x \cos y + y^2 + \phi(x).$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}-\cos y &= -\frac{\partial H}{\partial x} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} (x \cos y + y^2 + \phi(x)) \\ &= -\cos y - \phi'(x).\end{aligned}$$

Por consiguiente, podemos escoger que  $\phi$  sea cualquier constante, digamos 0, y nuestra función hamiltoniana es

$$H(x, y) = x \cos y + y^2.$$

Estudiaremos este sistema más detenidamente en los ejercicios.

## Puntos de equilibrio de sistemas hamiltonianos

Los sistemas hamiltonianos tienen varias propiedades especiales no compartidas por los sistemas generales de ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, suponga que  $(x_0, y_0)$  es nuestro punto de equilibrio para el sistema hamiltoniano

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y).\end{aligned}$$

La matriz jacobiana en este punto de equilibrio está dada por

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x} \end{pmatrix},$$

donde cada una de las derivadas parciales está evaluada en  $(x_0, y_0)$ . Como

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x},$$



**Zhihong Xia** (1962- ) recibió su grado de licenciatura en astronomía en la Nanjing University, en China, y su doctorado en matemáticas en la Northwestern University. En su tesis doctoral combinó sus habilidades matemáticas y conocimientos de astronomía para solucionar un problema de mecánica celeste no resuelto desde hace 100 años. Usando una variedad de procedimientos analíticos y cualitativos que implicaban sistemas hamiltonianos, Xia demostró que ciertas soluciones del sistema no lineal de las ecuaciones diferenciales, conocido como el problema de los  $n$  cuerpos, podía escapar al infinito en un tiempo finito.

En 1993, Xia recibió el prestigiado premio Blumenthal por la investigación en su tesis doctoral. Ha impartido cátedra en la Universidad de Harvard y en el Instituto Tecnológico de Georgia. Actualmente es profesor de matemáticas en la Northwestern University.

la matriz jacobiana toma la forma

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix},$$

donde  $\alpha = \partial^2 H / \partial x \partial y$ ,  $\beta = \partial^2 H / \partial y^2$  y  $\gamma = -\partial^2 H / \partial x^2$ .

El polinomio característico de esta matriz es

$$(\alpha - \lambda)(-\alpha - \lambda) - \beta\gamma = \lambda^2 - \alpha^2 - \beta\gamma.$$

Esto significa que los eigenvalores están dados por las raíces de

$$\lambda^2 = \alpha^2 + \beta\gamma,$$

que son

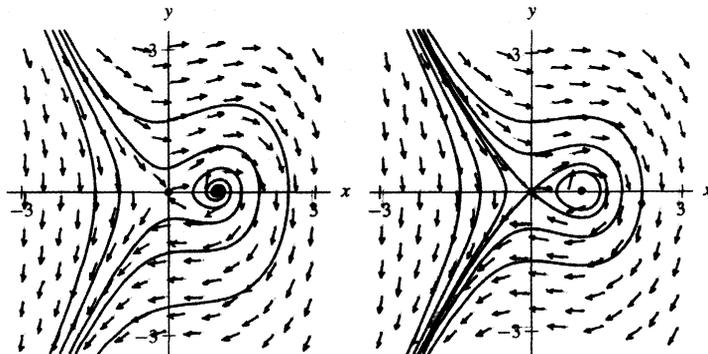
$$\lambda = \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta\gamma}.$$

Vemos entonces que sólo hay tres posibilidades para los eigenvalores:

1. Si  $\alpha^2 + \beta\gamma > 0$ , ambos eigenvalores son reales y tienen signos opuestos.
2. Si  $\alpha^2 + \beta\gamma < 0$ , ambos eigenvalores son imaginarios con parte real igual a cero.
3. Si  $\alpha^2 + \beta\gamma = 0$ , entonces 0 es el único eigenvalor.

En particular, no es posible tener eigenvalores que sean complejos y tengan partes reales no nulas para un sistema hamiltoniano en el plano. Las soluciones entonces no pueden moverse en espiral desde o hacia un punto de equilibrio. Del mismo modo, tampoco podemos tener dos eigenvalores positivos o dos negativos. Por ello, los sistemas hamiltonianos no pueden tener puntos de equilibrio que sean sumideros o fuentes. Esto nos da otra indicación preliminar de si un sistema dado es hamiltoniano: si el campo de direcciones indica la presencia de sumideros o fuentes, no es hamiltoniano. En la figura 5.34 se

muestran dos planos fase. Podemos decir con seguridad que el plano fase a la izquierda no proviene de un sistema hamiltoniano, porque tiene un punto de equilibrio que es un sumidero. El plano fase a la derecha sí podría corresponder a un sistema hamiltoniano. La única manera de corroborarlo es estudiar las fórmulas para el sistema como lo hemos hecho antes.



**Figura 5.34**

El plano fase a la izquierda no puede ser un sistema hamiltoniano, mientras que el de la derecha sí podría serlo.

## EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 5.3

1. Para el sistema

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= x^3 - x,\end{aligned}$$

(a) demuestre que el sistema y su función son hamiltonianos

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4},$$

(b) esboce los conjuntos de nivel de  $H$ , y

(c) bosqueje el plano fase para el sistema. Incluya una descripción de todos los puntos de equilibrio y cualesquiera conexiones de punto silla que existan.

2. Para el sistema

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x \cos(xy) \\ \frac{dy}{dt} &= -y \cos(xy),\end{aligned}$$

- (a) demuestre que el sistema y su función son hamiltonianos

$$H(x, y) = \operatorname{sen}(xy),$$

- (b) esboce los conjuntos de nivel de  $H$ , y  
 (c) dibuje el plano fase para el sistema. Incluya una descripción de todos los puntos de equilibrio y cualesquiera conexiones de ensilladuras que existan.
3. Para el sistema

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -x \operatorname{sen} y + 2y \\ \frac{dy}{dt} &= -\cos y,\end{aligned}$$

- (a) demuestre que la función y el sistema son hamiltonianos

$$H(x, y) = x \cos y + y^2,$$

- (b) bosqueje los conjuntos de nivel de  $H$ , y  
 (c) también el plano fase para el sistema. Incluya una descripción de todos los puntos de equilibrio y cualesquiera conexiones de punto silla que existan.

[Sugerencia: Aproveche cualquier dispositivo disponible para dibujar los conjuntos de nivel y los planos fase. Luego interprete las gráficas que obtenga.]

En los ejercicios 4-8, continúe el estudio del sistema del péndulo ideal con masa  $m$  en la lentejuela y longitud  $l$  en su brazo, dado por

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{g}{l} \operatorname{sen}\theta.\end{aligned}$$

4. (a) ¿Cuál es la linearización del sistema del péndulo ideal anterior en el punto de equilibrio  $(0, 0)$ ?  
 (b) Usando  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ , ¿cómo deben escogerse  $l$  y  $m$  para que las oscilaciones pequeñas del péndulo tengan un periodo de 1 segundo?
5. Para la linearización del péndulo ideal anterior en  $(0, 0)$ , el periodo de la oscilación es independiente de la amplitud. ¿Esto aplica para el péndulo ideal? ¿El periodo de oscilación es siempre el mismo, independientemente de qué tan alto oscile el péndulo? Si no es así, ¿el periodo será más corto o más largo para oscilaciones altas?
6. Un reloj de péndulo ideal (que hace "tick" una vez en cada oscilación del péndulo) marca el tiempo de manera perfecta cuando el péndulo realiza oscilaciones muy altas. ¿Se atrasa o se adelanta el reloj si la amplitud de las oscilaciones es muy pequeña?
7. (a) Si la longitud del brazo del péndulo ideal se duplica de  $l$  a  $2l$ , ¿cuál es el efecto sobre el periodo de las soluciones de pequeñas amplitudes de oscilación?  
 (b) ¿Cuál es la razón de cambio del periodo de oscilaciones de pequeña amplitud cuando  $l$  varía?

8. ¿Se atrasará o adelantará en la Luna un reloj de péndulo ideal que marca tiempo perfectamente sobre la Tierra?

En los ejercicios 9-12, determine si el sistema dado es hamiltoniano. Si lo es, encuentre una función hamiltoniana.

9.  $\frac{dx}{dt} = x - 3y^2$

$\frac{dy}{dt} = -y$

11.  $\frac{dx}{dt} = x \cos y$

$\frac{dy}{dt} = -y \cos x$

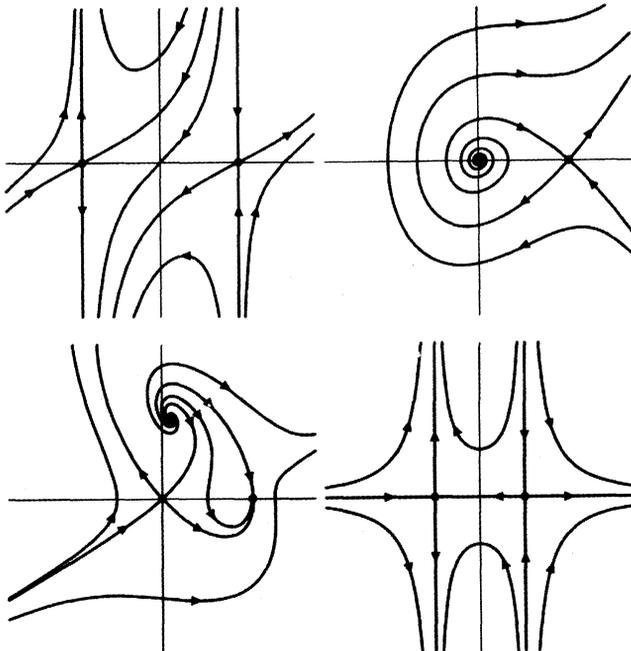
10.  $\frac{dx}{dt} = \sin x \cos y$

$\frac{dy}{dt} = -\cos x \sin y$

12.  $\frac{dx}{dt} = 1$

$\frac{dy}{dt} = y$

13. ¿Cuál de los siguientes planos fase correspondería a un sistema hamiltoniano? Si no es así, explique por qué.



14. Considere el sistema de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= F(y) \\ \frac{dy}{dt} &= G(x).\end{aligned}$$

Es decir,  $dx/dt$  depende sólo de  $y$ , y  $dy/dt$  sólo de  $x$ . Demuestre que este sistema es hamiltoniano. ¿Cuál es la función hamiltoniana?

15. Considere el sistema no lineal

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 1 - y^2 \\ \frac{dy}{dt} &= x(1 + y^2).\end{aligned}$$

- (a) ¿Se trata de un sistema hamiltoniano?  
 (b) Use una computadora para trazar el retrato fase de este sistema. ¿Piensa usted que hay una cantidad conservada en este sistema? ¿Puede encontrar una?  
 (c) Suponga que multiplicamos este campo vectorial por la función

$$f(x, y) = \frac{1}{1 + y^2}.$$

El nuevo campo vectorial es

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{1 - y^2}{1 + y^2} \\ \frac{dy}{dt} &= x.\end{aligned}$$

- ¿Es éste un sistema hamiltoniano?  
 (d) ¿Puede encontrar ahora una cantidad conservada para el sistema original?  
 (e) ¿Por qué funciona este método?

16. Considere el sistema no lineal

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -yx^2 \\ \frac{dy}{dt} &= x + 1.\end{aligned}$$

- (a) ¿Se trata de un sistema hamiltoniano?  
 (b) ¿Puede usted encontrar una cantidad conservada? [*Sugerencia:* Use el procedimiento del ejercicio anterior, multiplicando este sistema por una función que le dé al nuevo sistema la forma

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= F(y) \\ \frac{dy}{dt} &= G(x).\end{aligned}$$

17. Considere el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 1 - y^2 \\ \frac{dy}{dt} &= x(2 - y).\end{aligned}$$

Encuentre una cantidad conservada para este sistema.

En los ejercicios 18-20, estudiamos bifurcaciones de familias paramétricas de sistemas hamiltonianos. Como los puntos de equilibrio de estos últimos sistemas toman una forma especial, sus bifurcaciones también lo hacen.

18. Considere el sistema

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= x^2 - a,\end{aligned}$$

donde  $a$  es un parámetro.

(a) Verifique que es un sistema hamiltoniano y que

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^3}{3} + ax$$

es una función hamiltoniana.

- (b) Demuestre que el sistema tiene puntos de equilibrio en  $(x, y) = (\pm\sqrt{a}, 0)$  si  $a \geq 0$  y ningún punto de equilibrio si  $a < 0$ . Así entonces,  $a = 0$  es un valor de bifurcación del parámetro.
- (c) Linearice el sistema en cada uno de los puntos de equilibrio y determine el comportamiento de las soluciones cerca de los puntos de equilibrio.
- (d) Esboce las curvas de nivel de  $H$  (y por consiguiente el plano fase del sistema) para  $a = -1$ ,  $a = -0.5$ ,  $a = 0$ ,  $a = 0.5$  y  $a = 1$ . [Sugerencia: Piense sobre el efecto de cambiar  $a$  sobre la gráfica de  $H$ . Vale la pena emplear cualquier dispositivo graficador disponible.]
- (e) En un breve párrafo describa la bifurcación que tiene lugar en  $a = 0$ .

19. Considere el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x^2 + 2xy \\ \frac{dy}{dt} &= a - 2xy - y^2,\end{aligned}$$

que depende del parámetro  $a$ . Describa en detalle la bifurcación que ocurre en  $a = 0$ .

20. Suponga que Genaro y Pablo deciden modificar el modelo de sus niveles de entusiasmo, porque Pablo nota que su nivel también disminuye a una razón constante con el

tiempo. Por tanto, las nuevas ecuaciones son

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= x - x^2 - a.\end{aligned}$$

- (a) Describa con detalle cualquier bifurcación mayor que ocurra en esta familia.  
 (b) Suponga  $a = 1$ . ¿Qué sucede con el libro de Genaro y Pablo sin importar el entusiasmo con que comiencen ambos autores?

## 5.4 SISTEMAS DISIPATIVOS

Es obvio que los sistemas hamiltonianos analizados en el capítulo anterior son sistemas idealizados. En el mundo real, los péndulos no oscilan para siempre en un movimiento periódico. Al final se detienen; la energía se disipa. En esta sección examinaremos esos tipos de sistemas disipativos. Comenzaremos por modificar el péndulo ideal considerando un término de amortiguamiento mínimo.

### El péndulo no lineal con fricción

Recuerde que la ecuación de segundo orden que gobierna el movimiento del péndulo es

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l} \sin\theta = 0,$$

donde  $b$  es el coeficiente de amortiguamiento,  $m$  es la masa de la lentejuela del péndulo,  $l$  es la longitud del brazo del péndulo y  $g$  es la aceleración de la gravedad ( $g \approx 9.8 \text{ m/s}^2$ ). Todos los parámetros son positivos. El término

$$\frac{b}{m} \frac{d\theta}{dt}$$

resulta del amortiguamiento debido, por ejemplo, a la resistencia del aire o a la fricción en el pivote del brazo del péndulo. Consideramos que en nuestro sistema idealizado  $b = 0$ . En esta sección, supondremos que  $b \neq 0$ .

Introduciendo la velocidad  $v = d\theta/dt$ , esta ecuación diferencial de segundo orden puede escribirse como un sistema no lineal de la manera usual,

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{b}{m}v - \frac{g}{l}\sin\theta.\end{aligned}$$

Este sistema ya no es hamiltoniano, ya que nuestra prueba de existencia para una función hamiltoniana falla (véase p. 144) porque

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(v) = 0$$

pero

$$-\frac{\partial}{\partial v}\left(-\frac{b}{m}v - \frac{g}{l}\sin\theta\right) = \frac{b}{m} \neq 0.$$

**Los puntos de equilibrio y las nulclinales**

Empezaremos el estudio del sistema del péndulo amortiguado

$$\frac{d\theta}{dt} = v$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{b}{m}v - \frac{g}{l}\sin\theta$$

encontrando los puntos de equilibrio. Igual que para el péndulo ideal, los puntos de equilibrio ocurren en  $(\theta, v) = (0, 0), (\pm\pi, 0), (\pm 2\pi, 0)$ , etcétera.

La matriz jacobiana del campo vectorial en  $(\theta, v)$  es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}\cos\theta & -\frac{b}{m} \end{pmatrix}.$$

Si  $(\theta, v) = (0, 0), (\pm 2\pi, 0), (\pm 4\pi, 0)$ , etc. (los puntos de equilibrio donde el péndulo cuelga verticalmente), esta matriz es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{b}{m} \end{pmatrix}.$$

El sistema linearizado en esos puntos de equilibrio tiene a ésta como su matriz de coeficientes. Los eigenvalores de esta matriz son las raíces de la ecuación característica

$$-\lambda \left( -\frac{b}{m} - \lambda \right) + \frac{g}{l} = 0,$$

o

$$\lambda^2 + \frac{b}{m}\lambda + \frac{g}{l} = 0.$$

Por tanto, los eigenvalores son

$$-\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{g}{l}}.$$

Hay tres casos diferentes, dependiendo del signo de  $(b/(2m))^2 - g/l$ . Si esta cantidad es negativa, entonces los eigenvalores de la matriz jacobiana son complejos. La parte real es  $-b/(2m)$ , que es negativa, por lo que en este caso el equilibrio es un sumidero espiral. Si  $(b/(2m))^2 - g/l > 0$ , encontramos dos eigenvalores distintos reales. Como

$$0 < \left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{g}{l} < \left(\frac{b}{2m}\right)^2,$$

tenemos que

$$\frac{b}{2m} > \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{g}{l}},$$

y ambos eigenvalores son negativos. Finalmente, si  $(b/(2m))^2 - gl = 0$ , tenemos un eigenvalor repetido  $-b/(2m)$ , que es de nuevo negativo.

Encontramos así que en cada caso los puntos de equilibrio en  $(\theta, v) = (0, 0)$ ,  $(\pm 2\pi, 0)$ ,  $(\pm 4\pi, 0)$ , etc., son sumideros. Si centramos nuestra atención en el caso de un péndulo con una cantidad mínima de fricción, entonces  $b$  es muy pequeña. Para  $b$ , tenemos que  $(b/(2m))^2 - gl$  es negativa y los puntos  $(\theta, v) = (0, 0)$ ,  $(\pm 2\pi, 0)$ ,  $(\pm 4\pi, 0)$ , etc., son sumideros espirales. Aquí trataremos sólo este caso (vea los ejercicios para las demás situaciones).

En los otros puntos de equilibrio que corresponden al péndulo en posición vertical  $(\theta, v) = (\pm \pi, 0)$ ,  $(\pm 3\pi, 0)$ , etc., la matriz jacobiana es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & -\frac{b}{m} \end{pmatrix},$$

y ésta es la matriz de coeficientes para el sistema linearizado en esos puntos. Los eigenvalores son

$$-\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 + \frac{g}{l}}.$$

Esos eigenvalores son siempre reales porque  $b$ ,  $m$ ,  $l$  y  $g$  son positivos. El eigenvalor

$$-\frac{b}{2m} + \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 + \frac{g}{l}}$$

es positivo, mientras que

$$-\frac{b}{2m} - \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 + \frac{g}{l}},$$

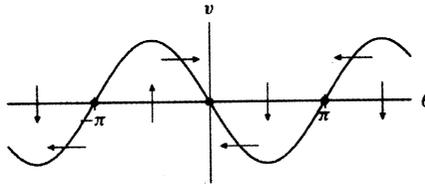
es negativo. Por tanto, los puntos de equilibrio  $(\theta, v) = (\pm \pi, 0)$ ,  $(\pm 3\pi, 0)$ , etc., son puntos silla.

Para encontrar las nulclinales  $\theta$  y  $v$ , note que  $d\theta/dt = 0$  si  $v = 0$ , por lo que el campo vectorial señala hacia arriba o hacia abajo a lo largo del eje  $\theta$ . La nulclinal  $v$  es donde  $dv/dt = 0$ , que ocurre sobre la curva

$$v = -\frac{mg}{bl} \operatorname{sen}\theta;$$

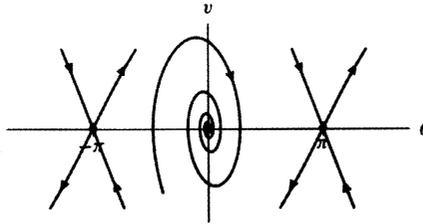
por lo que el campo vectorial señala en una dirección horizontal a lo largo de esta curva. Podemos determinar la dirección del campo vectorial en una región entre dos nulclinales, si verificamos la dirección en un solo punto (vea la figura 5.35).

Junto con nuestro análisis en los puntos de equilibrio, ahora podemos describir el comportamiento de las curvas solución cuando están cerca de éstos como se muestra en la figura 5.36. Observe que las curvas solución circulan alrededor de los puntos de equilibrio en  $(\theta, v) = (0, 0)$ ,  $(\pm 2\pi, 0)$ ,  $(\pm 4\pi, 0)$ , etc., en el mismo sentido que las manecillas del reloj. Podemos verificar que las separatrices estables e inestables en  $(\theta, v) = (\pm \pi, 0)$ ,  $(\pm 3\pi, 0)$ , etc., señalan en las direcciones indicadas en la figura 5.36, ya sea mediante la linearización en esos puntos o usando el campo de direcciones (vea la figura 5.35).



**Figura 5.35**  
Nulclinales para el sistema

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{b}{m}v - \frac{g}{l}\text{sen}\theta. \end{aligned}$$



**Figura 5.36**  
Plano fase cerca de los puntos de equilibrio para el sistema

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{b}{m}v - \frac{g}{l}\text{sen}\theta. \end{aligned}$$

### Los efectos de la disipación

En este punto, la figura 5.36 contiene toda la información acerca del plano fase del péndulo con amortiguamiento pequeño, que podemos obtener mediante los procedimientos cualitativos que tenemos a nuestra disposición. No tenemos el beneficio de una cantidad conservada como lo tuvimos en el caso sin fricción, por lo que no podemos determinar todo el plano fase. Sin embargo, usando la función hamiltoniana

$$H(\theta, v) = \frac{1}{2}v^2 - \frac{g}{l}\cos\theta$$

que desarrollamos en la última sección para el péndulo ideal, podemos completar el retrato. Si  $(\theta(t), v(t))$  es una solución del sistema del péndulo ideal (con  $b = 0$ ), entonces

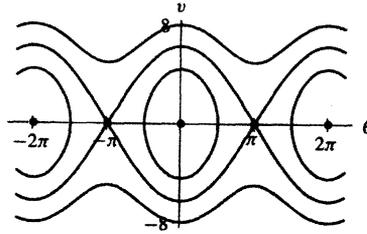
$$\frac{d}{dt}H(\theta(t), v(t)) = 0.$$

Si  $b \neq 0$ , esto ya no aplica. Sin embargo, si  $(\theta(t), v(t))$  es una solución del sistema del péndulo con  $b \neq 0$ , tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial H}{\partial v} \frac{dv}{dt} \\ &= \left(\frac{g}{l}\text{sen}\theta\right)v + v\left(-\frac{b}{m}v - \frac{g}{l}\text{sen}\theta\right) \\ &= -\frac{b}{m}v^2 \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Es decir, la función  $H$  ya no es constante a lo largo de las curvas solución del sistema, sino más bien  $H(\theta(t), v(t))$  decrece siempre que  $v(t) \neq 0$ . Por tanto, las curvas solución en el plano fase  $\theta$ - $v$  cortan los conjuntos de nivel de  $H$  moviéndose de mayores a menores valores de  $H$ .

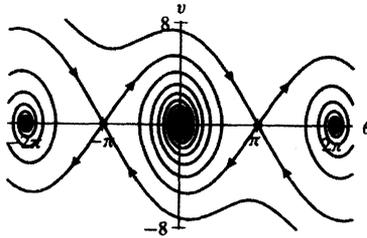
Esto nos da una estrategia para determinar el plano fase. Primero, dibujamos las curvas de nivel de  $H$  como lo hicimos antes (vea la figura 5.37). Si el valor de  $b/m$  y la velocidad  $v$  son pequeños, el valor de  $H$  disminuye lentamente a lo largo de las soluciones. Podemos esbozar el plano fase dibujando las curvas que fluyen en la misma dirección general que las curvas solución del péndulo ideal, pero que se mueven desde curvas de nivel de mayor valor de  $H$  hacia valores menores de  $H$  (vea la figura 5.38).



**Figura 5.37**

Curvas de nivel de

$$H = \frac{1}{2}v^2 - \frac{g}{l} \cos \theta.$$

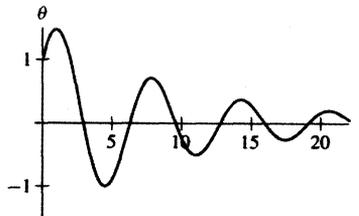


**Figura 5.38**

Plano fase para el sistema

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{b}{m}v - \frac{g}{l} \operatorname{sen} \theta. \end{aligned}$$

El hecho de que  $H$  disminuye a lo largo de las curvas solución nos permite determinar el destino de las separatrices estables e inestables que emanan de los puntos silla: las inestables deben caer hacia sumideros adyacentes, mientras que las estables llegan desde el “infinito” (vea la figura 5.38). Además, el análisis de puntos de equilibrio que llevamos a cabo concuerda con lo que acabamos de hacer. El retrato completo comienza a configurar un paquete agradable, con el análisis local cerca de los puntos de equilibrio, complementando la estructura global proporcionada por todas las curvas de nivel de  $H$ . Por último, si graficamos  $\theta(t)$  para una curva solución típica, vemos que el péndulo al final oscila alrededor de una posición de reposo que señala hacia abajo, tal como debe ser (vea la figura 5.39).



**Figura 5.39**

Una gráfica  $\theta(t)$  para una solución típica del sistema

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{b}{m}v - \frac{g}{l} \operatorname{sen} \theta. \end{aligned}$$

## Funciones de Lyapunov

La función  $H$  anterior juega un papel muy diferente para el péndulo amortiguado que para el péndulo ideal. Las soluciones del sistema del péndulo amortiguado se mueven a través de los conjuntos de nivel de  $H$  de valores mayores a menores. La función  $H$  se llama **función de Lyapunov**, en honor del matemático ruso Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857-1918). Esta idea puede generalizarse como:

**DEFINICIÓN** Se dice que  $L(x, y)$  es una **función de Lyapunov** para un sistema de ecuaciones diferenciales si, para cada solución  $(x(t), y(t))$  que no es una solución de equilibrio del sistema,

$$\frac{d}{dt}L(x(t), y(t)) \leq 0$$

para toda  $t$  con desigualdad estricta excepto para un conjunto discreto de  $t$ es. ■

Así entonces, el valor de una función de Lyapunov nunca crece, pero sí disminuye a lo largo de una solución de no equilibrio. Una función de Lyapunov puede ser de gran ayuda para dibujar el plano fase de un sistema. Las curvas solución deben cruzar los conjuntos de nivel de la función de Lyapunov de valores mayores a menores.

## El oscilador armónico amortiguado

Considere el sistema del oscilador armónico amortiguado

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= -qy - pv,\end{aligned}$$

donde  $q$  y  $p$  son constantes positivas. En la sección 5.3, p. 439 vimos que si  $p = 0$ , el sistema es hamiltoniano, con función hamiltoniana

$$H(y, v) = \frac{1}{2}v^2 + \frac{q}{2}y^2.$$

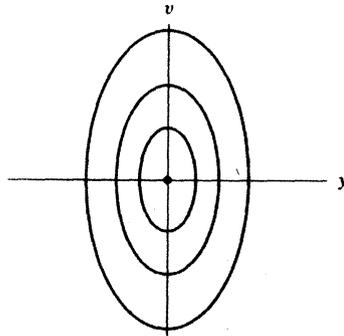
Si  $p > 0$  y  $(y(t), v(t))$  es una solución del sistema, entonces podemos calcular la razón de cambio de  $H$  a lo largo de la solución por

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}H(y(t), v(t)) &= \frac{\partial H}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial H}{\partial v} \frac{dv}{dt} \\ &= qy \cdot v + v(-qy - pv) \\ &= -pv^2 \\ &\leq 0.\end{aligned}$$

Por tanto,  $H(y(t), v(t))$  decrece a una razón no nula (excepto cuando  $v = 0$ ). Esto implica que  $H$  es una función Lyapunov para el sistema del oscilador armónico amortiguado. Los conjuntos de nivel de  $H$  son elipses en el plano  $y$ - $v$ , por lo que las soluciones del sistema del oscilador armónico amortiguado (con  $p > 0$ ) cruzan esos conjuntos de nivel con va-

lores de  $H$  que van de mayores a menores. Como  $H$  tiene un mínimo global en el origen y ningún otro punto crítico, todas las soluciones se aproximan al origen conforme pasa el tiempo (vea las figuras 5.40 y 5.41). Desde el punto de vista de los sistemas lineales, esto concuerda con nuestro análisis del oscilador armónico amortiguado y será de utilidad en la sección 6.2.

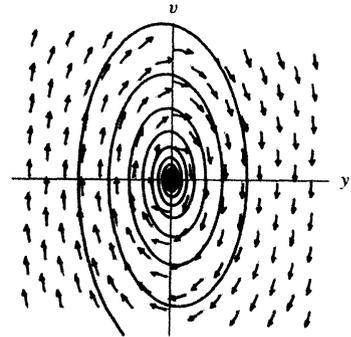
Como mencionamos antes (ver ejemplos de sistemas hamiltonianos, sección 5.3), el valor de  $H$  en un punto  $(y, v)$  se llama la energía del oscilador armónico en la posición y con velocidad  $v$ . Afirmar que  $H$  decrece a lo largo de las soluciones del sistema del oscilador armónico amortiguado es una manera precisa de decir que el amortiguamiento disipa energía. Lo mismo es cierto para el péndulo con fricción.



**Figura 5.40**  
Conjuntos de nivel para

$$H(y, v) = \frac{1}{2}v^2 + \frac{q}{2}y^2.$$

Con la excepción del punto en el origen, cada conjunto de nivel es una elipse.



**Figura 5.41**  
Plano fase para el oscilador armónico amortiguado

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= -qy - pv \end{aligned}$$

con  $p$  pequeña.

## Sistemas de gradiente

No todos los sistemas tienen funciones de Lyapunov. Encontrar una función de Lyapunov para un sistema, aunque de alguna manera sepamos que éste contiene tal función, puede ser extremadamente difícil. Sin embargo, para algunos problemas de modelado el sistema físico en estudio proporciona una motivación para hacer una "conjetura afortunada" respecto a una función de Lyapunov. Éste es el caso para el péndulo y para el oscilador armónico amortiguados. La función hamiltoniana de un sistema no amortiguado se vuelve una función de Lyapunov si se agrega amortiguamiento.

En algunos casos, la función de Lyapunov es una parte integral de la construcción del sistema. A éstos se les denomina **sistemas de gradiente**. Comenzaremos con un ejemplo.

## Navegación por olfato

Muchas especies de animales emplean el olfato para navegar en su ambiente. Por ejemplo, una langosta puede usar sus antenas para detectar concentraciones muy pequeñas de productos químicos en el agua donde habita (es decir, "huele" el agua). Con esta habilidad, puede determinar de dónde procede un olor y así encontrar su alimento en el fondo lodoso. Aunque no es claro cómo lo logran estos crustáceos, es posible que perciban las variaciones locales en la concentración y se muevan en dirección hacia donde el olor aumenta más rápidamente.\*

Para describir cómo podemos diseñar una langosta mecánica que navegue por olfato, comenzamos suponiendo que nuestro prospecto sólo puede moverse sobre un plano dimensional. Sea  $S(x, y)$  igual a la concentración en  $(x, y)$  de los productos químicos que conforman el olor de un pez muerto. Por cálculo vectorial sabemos que en  $(x, y)$ , la dirección en que  $S$  crece más rápidamente está dada por el vector gradiente

$$\nabla S(x, y) = \left( \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial y} \right).$$

Esto define un campo vectorial sobre el plano  $x$ - $y$ . Suponemos que nuestra langosta modelo siempre se desplazará en la dirección en que el olor se incrementa más rápido. Por tanto, la velocidad del movimiento de la langosta señala en la misma dirección que el gradiente de  $S$ . Si  $(x(t), y(t))$  denota la localización de la langosta en el tiempo  $t$ , entonces el vector velocidad está dado por

$$\left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) = \nabla S(x(t), y(t)).$$

Escrito en términos de ecuaciones escalares, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial S}{\partial x} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial S}{\partial y}. \end{aligned}$$

Usamos este sistema de ecuaciones para determinar el movimiento de la langosta. Si la posición inicial es  $(x_0, y_0)$  en el tiempo  $t = 0$ , entonces la curva solución en el plano fase que satisface esta condición inicial es nuestra predicción de la trayectoria de la langosta.

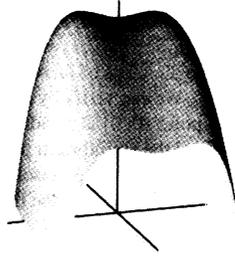
### Dos peces muertos

Suponga que  $S(x, y)$  está definido por  $-2 \leq x \leq 2$  y  $-2 \leq y \leq 2$ , y está dado por la fórmula

$$S(x, y) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{y^2}{2} + 8.$$

La gráfica de  $S$  se muestra en la figura 5.42. Restringimos nuestra atención a la región del plano  $x$ - $y$  con  $x$  y  $y$  entre 2 y  $-2$ , porque esta función  $S$  toma valores negativos cuando  $x$  o

\* La habilidad de las langostas para efectuar este "cálculo" en fluidos turbulentos sólo está comenzando a ser duplicado por la tecnología. Vea Lipkin, R., "Tracking Undersea Scent", *Science News*, 147, 5 (1994): p. 78, para el análisis de una "robo-langosta".

**Figura 5.42**

Gráfica de la función

$$S(x, y) = x^2/2 - x^4/4 - y^2/2 + 8.$$

y es grande, y las concentraciones negativas no tienen sentido físico. En los ejercicios se consideran opciones más reales pero más complicadas algebraicamente para  $S$ .

Podemos ver (o calcular con los procedimientos del cálculo vectorial) que  $S$  tiene un máximo local en cada uno de los puntos  $(-1, 0)$  y  $(1, 0)$  y un punto silla en  $(0, 0)$ . Una función de este tipo podría presentarse si hubiese un pez muerto oloroso en cada uno de los puntos  $(-1, 0)$  y  $(1, 0)$ .

El gradiente de  $S$  da lugar a un campo vectorial y, como antes, esto especifica un sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{\partial S}{\partial x} = x - x^3 \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial S}{\partial y} = -y.\end{aligned}$$

Por construcción, el vector velocidad de una solución de este sistema es igual al gradiente de  $S$ , y por consiguiente señala en la dirección donde  $S$  crece más rápido. Si  $(x(t), y(t))$  es una solución, calculamos la razón de cambio de  $S$  a lo largo de la solución con

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}S(x(t), y(t)) &= \frac{\partial S}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial S}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= (x - x^3)(x - x^3) + (-y)(-y) \\ &= (x - x^3)^2 + y^2 \\ &\geq 0.\end{aligned}$$

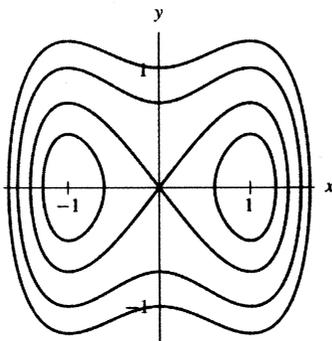
Por consiguiente,  $S$  crece en todo punto en que  $\nabla S \neq 0$ . Ésos son precisamente los puntos en que el campo vectorial del sistema es cero, es decir, los puntos de equilibrio del sistema.

Para esbozar el plano fase del sistema

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{\partial S}{\partial x} = x - x^3 \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial S}{\partial y} = -y,\end{aligned}$$

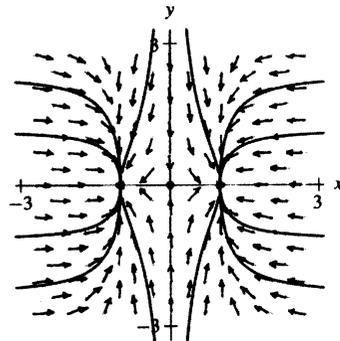
empezaremos por bosquejar los conjuntos de nivel de  $S$  (vea la figura 5.43). El campo de direcciones señala hacia el gradiente de  $S$ , que es perpendicular a los conjuntos de nivel. Dibujamos las curvas solución siempre perpendiculares a los conjuntos de nivel de  $S$ , moviéndose en la dirección de una  $S$  creciente (vea la figura 5.44).

Mediante linealización, podemos verificar que los puntos de equilibrio  $(\pm 1, 0)$  son sumideros, mientras que el punto  $(0, 0)$  es un punto silla (vea los ejercicios). Las langostas que comienzan en  $x(0) < 0$  se aproximan hacia el punto de equilibrio  $(-1, 0)$ , mientras que aquellas que lo hacen en  $x(0) > 0$  tienden hacia  $(1, 0)$ . Si una langosta inicia precisamente sobre el eje  $y$  ( $x(0) = 0$ ), entonces se aproximará al punto silla en el origen, incapaz de decidirse entre los dos peces.



**Figura 5.43**  
Conjuntos de nivel de

$$S(x, y) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{y^2}{2} + 8.$$



**Figura 5.44**  
Plano fase para el sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial S}{\partial x} = x - x^3 \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial S}{\partial y} = -y. \end{aligned}$$

### Forma general de los sistemas de gradiente

El campo vectorial para el sistema del ejemplo anterior es el gradiente de la función  $S$ , por lo que es natural llamarlo un sistema de gradiente.

**DEFINICIÓN** Un sistema de ecuaciones diferenciales se llama un **sistema de gradiente** si existe una función  $G$  tal que

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial G}{\partial x} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial G}{\partial y} \end{aligned}$$

para todo  $(x, y)$ . ■

Igual que en el ejemplo, si  $(x(t), y(t))$  es una solución para un sistema de gradiente con campo vectorial dado por el gradiente de  $G(x, y)$ , entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}G(x(t), y(t)) &= \frac{\partial G}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial G}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^2 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Es decir, el valor de  $G$  crece a lo largo de toda la órbita excepto en puntos críticos de  $G$ . La función  $-G$  disminuye a lo largo de las órbitas, y por tanto es una función de Lyapunov para este sistema.

### Propiedades de los sistemas de gradiente

Igual que en el caso de los sistemas hamiltonianos, los sistemas de gradiente gozan de varias propiedades especiales que hacen que sus planos fase sean relativamente simples. Por una parte, no pueden tener soluciones periódicas. Además, como la función gradiente crece a lo largo de todas las soluciones de no equilibrio, una curva solución nunca puede retornar a su lugar de origen.

También hay restricciones sobre los tipos de puntos de equilibrio que ocurren en un sistema de gradiente. Supongamos que

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial G}{\partial x} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial G}{\partial y} \end{aligned}$$

es un sistema de gradiente. Entonces la matriz jacobiana asociada con este campo vectorial es

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \end{pmatrix}.$$

Como las derivadas parciales mixtas de  $G$  son iguales, esta matriz asume la forma

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix},$$

donde  $\alpha = \partial^2 G / \partial x^2$ ,  $\beta = \partial^2 G / \partial y \partial x$  y  $\gamma = \partial^2 G / \partial y^2$ . Los eigenvalores son raíces de la ecuación

$$\lambda^2 - (\alpha + \gamma)\lambda + \alpha\gamma - \beta^2 = 0,$$

que son

$$\frac{\alpha + \gamma \pm \sqrt{(\alpha + \gamma)^2 - 4\alpha\gamma + 4\beta^2}}{2}.$$

Simplificando, vemos que los eigenvalores son iguales a

$$\frac{1}{2}(\alpha + \gamma) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\alpha - \gamma)^2 + 4\beta^2}.$$

Como el término  $(\alpha - \gamma)^2 + 4\beta^2 \geq 0$ , se infiere que esos eigenvalores nunca tienen una parte imaginaria; es decir, los eigenvalores son siempre reales. Los sistemas de gradiente no tienen sumideros espirales, fuentes espirales, ni centros.

Es importante observar que no todos los sistemas de ecuaciones diferenciales que poseen funciones de Lyapunov son sistemas de gradiente. Por ejemplo, el sistema lineal

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -x + y \\ \frac{dy}{dt} &= -x - y\end{aligned}$$

tiene una función de Lyapunov dada por  $L(x, y) = x^2 + y^2$ . Para verificarlo, calculamos la derivada de  $L$  a lo largo de una solución  $(x(t), y(t))$ :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}L(x(t), y(t)) &= 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} \\ &= 2x(-x + y) + 2y(-x - y) \\ &= -2(x^2 + y^2) \\ &\leq 0.\end{aligned}$$

Puesto que  $dL/dt = 0$  sólo en el origen, esta función decrece a lo largo de todas las curvas solución de no equilibrio. Pero  $L$  no puede ser un sistema gradiente, ya que los eigenvalores en  $(0, 0)$  son complejos  $(-1 \pm i)$ ; por tanto, el origen es un sumidero espiral, que no puede ocurrir en sistemas gradientes.

## EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 5.4

1. Considere el sistema

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -x^3 \\ \frac{dy}{dt} &= -y^3.\end{aligned}$$

- (a) Verifique que

$$L(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$$

es una función de Lyapunov para el sistema.

- (b) Esboce los conjuntos de nivel de  $L$ .  
 (c) ¿Qué puede concluir sobre el plano fase del sistema, a partir de la información en los incisos anteriores (a) y (b)? (Esboce el plano fase y en un ensayo breve describa todo lo que sepa acerca de dicho plano y cómo obtuvo la información.)

2. Considere el sistema

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -x - \frac{y}{4} + x^2.\end{aligned}$$

(a) Verifique que

$$L(x, y) = \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$$

es una función de Lyapunov para el sistema.

(b) Esboce los conjuntos de nivel de  $L$ .

(c) ¿Qué puede concluir sobre el plano fase del sistema, a partir de la información de los incisos anteriores (a) y (b)? (Dibuje el plano fase y escriba en un ensayo corto todo lo que sepa acerca del plano fase y cómo obtuvo la información.)

3. Considere el sistema

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -4x - 0.1y.\end{aligned}$$

(a) Verifique que todas las soluciones tienden hacia el origen cuando  $t$  se incrementa, y esboce el plano fase. [*Sugerencia:* El sistema es lineal.]

(b) Demuestre que

$$L(x, y) = x^2 + y^2$$

no es una función de Lyapunov para el sistema.

(c) Compruebe que

$$K(x, y) = 2x^2 + \frac{y^2}{2}$$

es una función de Lyapunov para el sistema.

En los ejercicios 4-11, consideramos el sistema del péndulo amortiguado

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{g}{l} \operatorname{sen}\theta - \frac{b}{m}v,\end{aligned}$$

donde  $b$  es el coeficiente de amortiguamiento,  $m$  es la masa de la lentejuela,  $l$  es la longitud del brazo y  $g$  es la aceleración de la gravedad ( $g \approx 9.8 \text{ m/s}^2$ ).

4. ¿Qué relación debe haber entre los parámetros  $b$ ,  $m$  y  $l$  para que el periodo de una pequeña oscilación del péndulo amortiguado sea de un segundo?
5. Suponga que tenemos un reloj que usa un péndulo ligeramente amortiguado para dar el tiempo (es decir,  $b$  es positivo pero  $b \approx 0$ ). El reloj hace "tic" cada vez que el brazo del péndulo cruza  $\theta = 0$ . Si la masa de la lentejuela del péndulo se aumenta, ¿el reloj se adelanta o se retrasa?
6. Suponga que tenemos un reloj que usa un péndulo ligeramente amortiguado para dar el tiempo. El reloj hace "tic" cada vez que el brazo del péndulo cruza  $\theta = 0$ .
  - (a) Cuando al reloj le "falta cuerda" (la amplitud de las oscilaciones decrece), ¿se atrasa o se adelanta?

- (b) Si el empuje inicial al péndulo es grande, de manera que el péndulo oscila muy cerca de la vertical, el reloj ¿se adelantará o se atrasará mucho?
7. Para valores fijos de  $b$  y  $l$ , ¿qué valores de la masa  $m$  deberán emplearse para que el péndulo funcione en un reloj?
8. Suponga que  $l = 9.8$  m (de modo que  $gl = 1$ ),  $m = 1$  y  $b$  grande, es decir  $b = 4$ . Para el sistema del péndulo amortiguado visto antes y con estos parámetros, haga lo siguiente:
- Encuentre los eigenvalores y eigenvectores del sistema linearizado en el punto de equilibrio  $(0, 0)$ .
  - Determine los eigenvalores y eigenvectores del sistema linearizado en el punto de equilibrio  $(\pi, 0)$ .
  - Esboce el plano fase cerca de los puntos de equilibrio.
  - Bosqueje todo el plano fase. [Sugerencia: Comience por dibujar los conjuntos de nivel de  $H$  como en el texto.]
9. Imaginemos que tenemos un reloj de péndulo que usa un oscilador ligeramente amortiguado para marcar el tiempo, y que hace “tic” cada vez que el brazo del péndulo cruza  $\theta = 0$ , pero este último debe alcanzar una altura de  $\theta = \pm 0.1$  para que se registre la oscilación (es decir, si la oscilación completa tiene lugar con  $-0.1 < \theta < 0.1$ , entonces el reloj no hace tic). Supongamos que un tic es un segundo. En términos de los parámetros  $b$ ,  $m$  y  $l$ , haga una estimación de durante cuánto tiempo daría el reloj la hora exacta. Comente por qué a los relojes de péndulo hay que darles cuerda.
10. (a) Para el péndulo ligeramente amortiguado ( $b > 0$  pero  $b$  cercano a cero) encuentre el conjunto de todas las condiciones iniciales  $(\theta(0), v(0))$  para soluciones que ejecutan exactamente dos revoluciones completas para  $t > 0$  (es decir, que pasan por la posición vertical exactamente dos veces) antes de caer en un movimiento oscilatorio de ida y vuelta. Esboce el plano fase para el péndulo ligeramente amortiguado y sombree esas condiciones iniciales.
- (b) Repita el inciso (a) para las soluciones que realizan exactamente cinco revoluciones completas para  $t > 0$  antes de caer en un movimiento oscilatorio de ida y vuelta.
11. Suponga que en vez de agregar amortiguamiento al péndulo ideal, añadimos una pequeña cantidad de “antiamortiguamiento”; es decir, consideramos  $b$  ligeramente negativa en el sistema del péndulo amortiguado. Físicamente esto significa que siempre que la velocidad sea diferente de cero, el péndulo estará acelerado en la dirección del movimiento.
- Linearice y clasifique los puntos de equilibrio en esta situación.
  - Esboce el plano fase para este sistema.
  - Describa en un párrafo breve el comportamiento de una solución con condición inicial cerca de  $\theta = v = 0$ .
12. Sea  $G(x, y) = x^3 - 3xy^2$ .
- ¿Cuál es el sistema de gradiente con campo vectorial dado por el gradiente de  $G$ ?
  - Esboce la gráfica y los conjuntos de nivel de  $G$ .
  - Bosqueje el plano fase del sistema de gradiente en el inciso (a).

13. Sea  $G(x, y) = x^2 - y^2$ .

- ¿Cuál es el sistema de gradiente con el campo vectorial dado por el gradiente de  $G$ ?
- Clasifique el punto de equilibrio en el origen. [*Sugerencia:* Este sistema es lineal.]
- Esboce la gráfica de  $G$  y los conjuntos de nivel de  $G$ .
- Dibuje el plano fase del sistema de gradiente en el inciso (a).

14. Sea  $G(x, y) = x^2 + y^2$ .

- ¿Cuál es el sistema de gradiente con el campo vectorial dado por el gradiente de  $G$ ?
- Clasifique el punto de equilibrio en el origen. [*Sugerencia:* Este sistema es lineal.]
- Esboce la gráfica de  $G$  y los conjuntos de nivel de  $G$ .
- Dibuje el plano fase del sistema de gradiente en el inciso (a).

15. Para el ejemplo de los dos peces muertos dado por el sistema

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x - x^3 \\ \frac{dy}{dt} &= -y,\end{aligned}$$

- encuentre el sistema linearizado para el punto de equilibrio en el origen y verifique que éste es un punto silla.
- determine el sistema linearizado para el punto de equilibrio en  $(1, 0)$  y demuestre que éste es un sumidero.
- de los eigenvalores y eigenvectores del sistema en el inciso (b), calcule la dirección desde donde se acercará la langosta modelo al punto de equilibrio  $(1, 0)$ , y
- revise que el sistema linearizado en el punto de equilibrio  $(-1, 0)$  es el mismo que en  $(1, 0)$ .

16. El sistema para el ejemplo de los dos peces muertos

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x - x^3 \\ \frac{dy}{dt} &= y,\end{aligned}$$

tiene la propiedad especial de que las ecuaciones “se desacoplan”, es decir, la ecuación para  $dx/dt$  depende sólo de  $x$  y la que corresponde a  $dy/dt$  depende sólo de  $y$ .

- Esboce las líneas fase para las ecuaciones  $dx/dt$  y  $dy/dt$ .
- Usando las líneas fase, esboce el plano fase del sistema.

17. Suponga que el olor de un montón de peces muertos en la región  $-2 \leq x \leq 2$ ,  $-2 \leq y \leq 2$  está dado por la función

$$S(x, y) = x^2 + y^2 - \frac{x^4 + y^4}{4} - 3x^2y^2 + 100.$$

- ¿Cuál es el sistema de gradiente cuyo campo vectorial es el gradiente de  $S$ ?

- (b) Usando una calculadora, esboce el plano fase para este sistema.  
 (c) ¿Cuántos peces muertos hay y dónde se encuentran?  
 (d) Con los resultados del inciso (b), haga un bosquejo de los conjuntos de nivel de  $S$ .  
 (e) ¿Por qué no es veraz el sistema para valores grandes de  $x$  o  $y$ ?

18. Un modelo razonable para el olor en  $(x, y)$  de un pez muerto situado en  $(x_1, y_1)$  está dado por

$$S_1(x, y) = \frac{1}{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + 1}.$$

Es decir,  $S_1$  está dado por 1 sobre la distancia al cuadrado del pez muerto más 1.

- (a) Formule la función  $S$  que dé el olor total de los tres peces muertos situados en  $(1, 0)$ ,  $(-1, 0)$  y  $(0, 2)$ .  
 (b) Bosqueje los conjuntos de nivel de  $S$ .  
 (c) Esboce el plano fase del sistema de gradiente

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial S}{\partial x} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial S}{\partial y}. \end{aligned}$$

- (d) Escriba explícitamente las fórmulas para los lados derechos de las ecuaciones del inciso (c).  
 (e) En la definición de  $S_1$ , ¿por qué usamos distancia al cuadrado más 1, en vez de sólo distancia al cuadrado? ¿Por qué usamos distancia al cuadrado más 1 en vez de sólo distancia más 1 en la definición de  $S_1$ ?

19. Suponga que

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y) \end{aligned}$$

es un sistema de gradiente. Es decir, existe una función  $G(x, y)$  tal que  $f = \partial G/\partial x$  y  $g = \partial G/\partial y$ .

- (a) Verifique que si  $f$  y  $g$  tienen derivadas parciales continuas, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

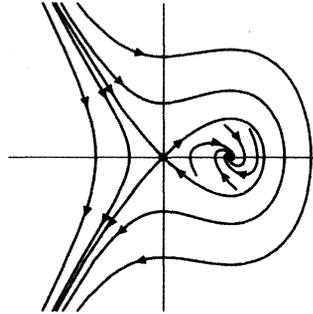
para todo  $(x, y)$ .

- (b) Use lo anterior para demostrar que el sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x^2 + 3xy \\ \frac{dy}{dt} &= 2x + y^3 \end{aligned}$$

no es un sistema de gradiente.

20. El siguiente retrato de fase no puede ocurrir para un sistema de gradiente. Explique por qué.



21. Sea

$$H(y, v) = \frac{1}{2}v^2 + V(y)$$

para alguna función  $V$  y considere el sistema hamiltoniano asociado

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial v} = v \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{dV}{dy}.\end{aligned}$$

Sea  $k$  una constante positiva. Dé una interpretación física de la relación entre el sistema hamiltoniano y

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{dV}{dy} - kv.\end{aligned}$$

Demuestre que  $H$  es una función Lyapunov para este sistema.

22. Considere el sistema hamiltoniano

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial y} \\ \frac{dy}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x}\end{aligned}$$

y el sistema de gradiente

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial y},\end{aligned}$$

donde  $H$  es la misma función en cada caso. ¿Qué puede usted decir acerca de la relación entre los dos retratos fase de ambos sistemas?

## 5.5 SISTEMAS NO LINEALES EN TRES DIMENSIONES

En la sección 2.5 vimos que las soluciones de las ecuaciones diferenciales con tres variables dependientes son curvas en el espacio tridimensional, las cuales pueden moverse en lazos una alrededor de otra en formas muy complicadas. En la sección 3.8 estudiamos el comportamiento de los sistemas lineales con tres variables dependientes, y podemos determinarlo con los eigenvalores y los eigenvectores. Sin embargo, la lista de los posibles comportamientos es mucho más larga que para los sistemas planos.

En esta sección consideraremos dos ejemplos de sistemas no lineales en tres dimensiones. El primero es un modelo de población con tres especies formando una cadena de alimentos. Para el segundo ejemplo, volvemos a las ecuaciones de Lorenz estudiadas en la sección 2.5. Podemos usar el procedimiento de linearización de los puntos de equilibrio y aproximaciones numéricas (método de Euler) para obtener algo de información acerca de esos sistemas. Como ya recalcamos en secciones previas, hay muy pocas herramientas de propósito general para ecuaciones diferenciales en tres y más dimensiones. Esos sistemas son un área de investigación activa dentro de las matemáticas.

### Un modelo de cadena alimenticia

Hemos estudiado el comportamiento de poblaciones que viven aisladas y de pares de especies interactuando en sistemas depredador-presa en cooperación y en competencia. Esos sistemas apenas tocan la superficie de los tipos de complicadas interacciones encontradas en la naturaleza. Una posibilidad es la formación de una cadena alimenticia de tres o más especies. Una misma especie puede ser depredador y presa. Un ejemplo que se ha estudiado recientemente incluye el abeto balsámico, el alce y el lobo. Los abetos son comidos por los alces y los alces (en particular los individuos jóvenes y enfermos) son comidos por los lobos. Una pregunta natural es si los cambios en la población de lobos afecta o no a la población de árboles. Los estudios más recientes de la población árbol/alce/lobo en el parque de la isla Royal National\* indican que los cambios en la población de los lobos puede afectar a la población de los árboles.

Formaremos un modelo de un sistema con tres especies, cada una devorada por la siguiente. Por conveniencia, llamamos a esas especies árboles, alces y lobos como analogía del ejemplo anterior. Si

$x(t)$  = población de árboles en el tiempo  $t$ ,

$y(t)$  = población de alces en el tiempo  $t$ , y

$z(t)$  = población de lobos en el tiempo  $t$ .

Suponemos que cada una de las poblaciones aisladas puede ser modelada por una ecuación logística y que el efecto de la interacción entre aquéllas es proporcional al producto de las poblaciones. El comportamiento de las soluciones dependerá de los parámetros escogidos para la razón de crecimiento, la capacidad de soporte y el efecto de la interacción. Para obtener una idea de cómo se comportan las soluciones de sistemas de esta forma, comenzamos por considerar que todos los parámetros son iguales a 1. (Esto no

---

\* Vea McLaren, B. E. y Peterson, R. O., "Wolves, Moose and Tree Rings on Isle Royale", *Science*, 266 (1994): p. 1555.

es ciertamente el caso para árboles, alces y lobos, pero hace mucho más sencilla la aritmética.) Nuestro modelo es

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x(1-x) - xy \\ \frac{dy}{dt} &= y(1-y) + xy - yz \\ \frac{dz}{dt} &= z(1-z) + yz.\end{aligned}$$

Note que el crecimiento de la población de árboles disminuye por la presencia de alces (el término  $-xy$ ), también que el crecimiento de esta última especie se incrementa por los árboles (la notación  $+xy$ ) pero disminuye por los lobos (el término  $-yz$ ), y que el aumento en la población de lobos se ve favorecido por la presencia de los alces (el término  $+yz$ ).

Podemos encontrar los puntos de equilibrio de este sistema haciendo cero los lados derechos de las ecuaciones y despejando  $x$ ,  $y$  y  $z$ . Los puntos de equilibrio son  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ ,  $(1, 0, 1)$  y  $(2/3, 1/3, 4/3)$ . De éstos, sólo el punto  $(2/3, 1/3, 4/3)$  tiene las tres coordenadas diferentes de cero, por lo que las tres especies pueden coexistir en equilibrio bajo esas poblaciones. La matriz jacobiana para este sistema en  $(x, y, z)$  es

$$\begin{pmatrix} 1 - 2x - y & -x & 0 \\ y & 1 - 2y + x - z & -y \\ 0 & z & 1 - 2z + y \end{pmatrix}$$

En el punto de equilibrio  $(2/3, 1/3, 4/3)$ , el jacobiano es

$$\begin{pmatrix} -2/3 & -2/3 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 4/3 & -4/3 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de la matriz es

$$-\left(\lambda^3 + \frac{7}{3}\lambda^2 + \frac{20}{9}\lambda + \frac{8}{9}\right),$$

y los eigenvalores son

$$\lambda_1 = -1 \quad y \quad \lambda_2, \lambda_3 = -\frac{2}{3} \pm \frac{2}{3}i.$$

Como  $\lambda_1$  es negativo y  $\lambda_2$  y  $\lambda_3$  tienen parte real negativa, este punto de equilibrio es un sumidero y todas las soluciones con condiciones iniciales suficientemente cercanas tenderán hacia él cuando  $t$  aumente. De hecho, las simulaciones numéricas muestran que toda solución con condiciones iniciales en el primer octante (donde  $x$ ,  $y$  y  $z$  son positivas) tienden a este punto de equilibrio. Por tanto, esperamos que a largo plazo las poblaciones se estabilicen bajo esos valores y que las especies coexistan en equilibrio.

Este modelo no incluye muchos factores del medio ambiente que pueden tener un efecto importante sobre las poblaciones. Por ejemplo, en 1981, una enfermedad disminuyó la población de lobos en forma considerable. Más recientemente, el crudo invierno de

1996-1997 ocasionó una declinación en la población de alces.\* Construir un modelo que incluya tales factores es por lo menos tan difícil como predecir el estado del tiempo a largo plazo. Sin embargo, abajo veremos que podemos estudiar el efecto de tales eventos ajustando los parámetros en el modelo simple.

Supongamos que una enfermedad afecta la población de lobos, que es el depredador en la parte superior de la cadena de alimentos. Cada año esta enfermedad mata una cierta pequeña fracción de la población. Podemos ajustar nuestro modelo para incluir este elemento agregando el término  $-\gamma z$  a la ecuación  $dz/dt$ , donde  $\gamma$  es un parámetro que indica la fracción de la población que muere por la enfermedad por tiempo unitario. El nuevo modelo es

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x(1-x) - xy \\ \frac{dy}{dt} &= y(1-y) + xy - yz \\ \frac{dz}{dt} &= z(1-z) - \gamma z + yz.\end{aligned}$$

Podemos calcular de nuevo los puntos de equilibrio para este sistema, que dependerán ahora del valor de  $\gamma$ . El único punto de equilibrio con las tres coordenadas diferentes de 0 es  $((2-\gamma)/3, (1+\gamma)/3, (4-2\gamma)/3)$ . Suponiendo que  $\gamma$  es pequeña, este punto será aún un sumidero. Podemos preguntar qué efecto tendrá sobre las poblaciones ajustar el valor de  $\gamma$ . Para verlo, calculamos la derivada de  $\gamma$  de cada una de las coordenadas del punto de equilibrio. Para  $z = (4-2\gamma)/3$ , la derivada respecto a  $\gamma$  es

$$\frac{d}{d\gamma} \left( \frac{4-2\gamma}{3} \right) = -\frac{2}{3},$$

que es negativa. Esto es como lo esperábamos, ya que un incremento en el efecto de la enfermedad debe disminuir el número de lobos. Para  $y = (1+\gamma)/3$ , la derivada con respecto a  $\gamma$  es

$$\frac{d}{d\gamma} \left( \frac{1+\gamma}{3} \right) = \frac{1}{3},$$

que es positiva. Entonces, un incremento en  $\gamma$  es bueno para la población de alces, como era de esperarse. Finalmente, para  $x = (2-\gamma)/3$ , la derivada con respecto a  $\gamma$  es

$$\frac{d}{d\gamma} \left( \frac{2-\gamma}{3} \right) = -\frac{1}{3},$$

que es negativa. Un incremento en  $\gamma$  disminuye la población de equilibrio de los árboles.

Hay dos observaciones importantes que hacer. Primero, aunque resulta sencillo hacer modelos simples de sistemas que representan largas cadenas alimenticias, no es tan fácil encontrarlas en la naturaleza. La mayor parte de los depredadores tienen varias especies de dónde escoger su alimento. Cuando una presa escasea, aquéllos cambian su dieta.

En segundo lugar, al modificar un sistema deben tomarse en cuenta las situaciones cambiantes. Aunque el análisis anterior puede parecer obvio, si hubiéramos escogido cam-

\* Vea "Winter Devastates Island's Moose", por Les Line en el *New York Times Science Section*, 1 de abril de 1997.

biar las ecuaciones para considerar la enfermedad de los lobos reduciendo el parámetro de la razón de crecimiento de su población, en ese caso habríamos obtenido resultados diferentes (vea los ejercicios).

## Ecuaciones de Lorenz

Las ecuaciones de Lorenz son

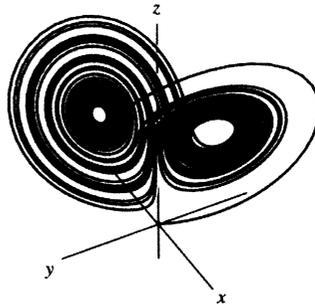
$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} &= \rho x - y - xz \\ \frac{dz}{dt} &= -\beta z + xy,\end{aligned}$$

donde  $\sigma$ ,  $\rho$  y  $\beta$  son parámetros. En la sección 2.5 fijamos los valores de los parámetros a  $\sigma = 10$ ,  $\beta = 8/3$  y  $\rho = 28$  para obtener el sistema estudiado por Lorenz:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 10(y - x) \\ \frac{dy}{dt} &= 28x - y - xz \\ \frac{dz}{dt} &= -\frac{8}{3}z + xy.\end{aligned}$$

Las aproximaciones numéricas que estudiamos en esa sección mostraron que las soluciones se mueven en lazos alrededor del espacio fase en una manera muy complicada (vea la figura 5.45). Con ayuda del procedimiento de linealización cerca de los puntos de equilibrio, podemos obtener algo más de información acerca del comportamiento de esas órbitas. (Sin embargo, la trama completa tendrá que esperar hasta el capítulo 8.)

Los puntos de equilibrio son  $(0, 0, 0)$ ,  $(6\sqrt{2}, 6\sqrt{2}, 27)$  y  $(-6\sqrt{2}, -6\sqrt{2}, 27)$ . Alrededor de cada uno de esos puntos efectuaremos linearizaciones para determinar el retrato local del espacio fase.



**Figura 5.45**

Una curva solución del sistema de Lorenz en el espacio fase  $x$ - $y$ - $z$ .

La matriz jacobiana en  $(x, y, z)$  es

$$\begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 - z & -1 & -x \\ y & x & -8/3 \end{pmatrix}.$$

En el origen, la jacobiana es

$$\begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -8/3 \end{pmatrix},$$

por lo que el sistema lineal que aproxima al sistema de Lorenz cerca del origen es

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -10x + 10y \\ \frac{dy}{dt} &= 28x - y \\ \frac{dz}{dt} &= -\frac{8}{3}z. \end{aligned}$$

Este sistema se desacopla porque las ecuaciones para  $dx/dt$  y  $dy/dt$  no dependen de  $z$ , y la ecuación para  $dz/dt$  no depende ni de  $x$  ni de  $y$ . En la sección 3.8 estudiamos este sistema y encontramos que el origen es un sumidero en la dirección  $z$  y un punto silla en el plano  $x$ - $y$ . En la gráfica tridimensional, el origen es un punto silla con un plano de condiciones iniciales tendiendo hacia el origen cuando  $t$  crece y una línea de condiciones iniciales próxima al origen cuando  $t$  decrece. El retrato del espacio fase se reproduce en la figura 5.46.

A continuación consideramos el punto de equilibrio  $(6\sqrt{2}, 6\sqrt{2}, 27)$ . El jacobiano en este punto es

$$\begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 1 & -1 & -6\sqrt{2} \\ 6\sqrt{2} & 6\sqrt{2} & -8/3 \end{pmatrix}.$$

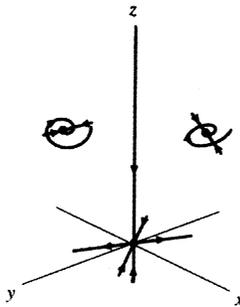
Los eigenvalores son  $\lambda_1 \approx -13.8$ ,  $\lambda_2 \approx 0.094 + 10.2i$  y  $\lambda_3 \approx 0.094 - 10.2i$ , por lo que este punto es un punto silla espiral que tiene una línea de soluciones cercanas al punto de equilibrio conforme  $t$  crece, y un plano de soluciones que se mueven en espiral hacia el punto de equilibrio conforme  $t$  decrece, las cuales se aproximan a dicho punto muy rápido a lo largo de la dirección del eigenvector del eigenvalor negativo, y luego se alejan en espiral lentamente a lo largo del plano correspondiente a los eigenvalores complejos. Al calcular los eigenvectores, podemos obtener la orientación de la línea recta de las soluciones y del plano de soluciones en espiral. Esto da una buena representación del espacio fase cerca del punto de equilibrio, que está esbozado en la figura 5.46.

Podemos determinar la linearización para el punto de equilibrio  $(-6\sqrt{2}, -6\sqrt{2}, 27)$  de la misma manera y encontramos que es también un punto silla espiral. Esos cálculos nos dan el retrato "local" del espacio fase cerca de los puntos de equilibrio (vea la figura 5.46). Colocando esto cerca de una solución del sistema completo no lineal de Lorenz, empezamos a ver algún orden en la manera en que se comporta la solución (vea

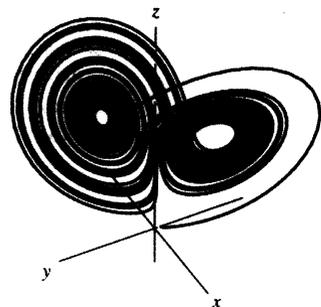
la figura 5.47), pues tiende a uno de los puntos de equilibrio  $(\pm 6\sqrt{2}, \pm 6\sqrt{2}, 27)$  a lo largo de la línea recta correspondiente al eigenvalor negativo. Al llegar cerca al punto de equilibrio, comienza a alejarse moviéndose en espiral. Cuando la espiral es suficientemente grande, la solución queda involucrada con el punto silla en el origen y regresa a repetir su patrón previo o bien va al punto de equilibrio “del otro lado”.

### Verificación de la realidad

El estudio del comportamiento local cerca de los puntos de equilibrio nos ha dado un poco más de información acerca del complicado comportamiento de las soluciones del sistema de Lorenz. Sin embargo, los retratos locales no nos dicen toda la historia. Esto es lo que hace tan difícil el estudio de éste y otros sistemas tridimensionales. El cálculo y los procedimientos de linealización nos dicen mucho sobre las partes pequeñas del espacio fase, pero el comportamiento de las soluciones también depende de qué está sucediendo “globalmente”. El desarrollo de las herramientas necesarias para estudiar esos sistemas, así como para entender los modelos individuales, es un área activa de la investigación matemática.



**Figura 5.46**  
Retratos de espacios fase locales alrededor de tres puntos de equilibrio.



**Figura 5.47**  
Una curva solución del sistema no lineal de Lorenz.

## EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 5.5

Los ejercicios 1-4 se refieren al modelo de la cadena alimenticia de tres especies

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x(1-x) - xy \\ \frac{dy}{dt} &= y(1-y) + xy - yz \\ \frac{dz}{dt} &= z(1-z) + yz.\end{aligned}$$

del texto. En la sección estudiamos la linealización para el punto de equilibrio donde las tres especies coexisten. Los otros puntos están dados abajo. Para cada uno,

- (a) encuentre el jacobiano en el punto,
- (b) encuentre los eigenvalores y eigenvectores,
- (c) clasifique el punto de equilibrio,
- (d) esboce el espacio fase del sistema linearizado, y
- (e) analice en unas pocas frases qué sucede a una solución con valor inicial cerca del punto de equilibrio. Habrá varios casos, dependiendo de qué poblaciones no son nulas. No necesita considerar las poblaciones negativas, pero sí todas las combinaciones de cero y poblaciones positivas que estén cerca del punto de equilibrio.

1. (1, 0, 0)                      2. (0, 1, 0)                      3. (0, 0, 1)                      4. (1, 0, 1)

5. Explique por qué hay un punto de equilibrio en (1, 0, 1) con árboles y lobos coexistiendo bajo sus capacidades de soporte, pero no hay puntos de equilibrio ni en (0, 1, 1) ni en (1, 1, 0).

- (a) Dé primero la razón “matemática” para estudiar las ecuaciones diferenciales.
- (b) Relacione esto con el modelo para comprobar si sus conclusiones son “físicamente razonables”.

6. Suponga que una enfermedad de los alces entra a la región de estudio y que  $\beta$  y alces por unidad de tiempo son abatidos por la enfermedad (donde  $\beta$  es pequeño).

- (a) Modifique el modelo para incluir la enfermedad de los alces.
- (b) ¿Cuáles son los puntos de equilibrio para el nuevo modelo (recuerde que  $\beta$  es pequeño)?
- (c) ¿Cómo afecta un incremento en  $\beta$  las poblaciones de equilibrio de árboles, alces y lobos cuando las tres especies coexisten?

7. En esta sección modificamos el modelo original árbol-alce-lobo para incluir el efecto de una enfermedad en los lobos, sustrayendo un término  $\zeta y$  de la población de lobos. Es tentador considerar que el efecto de una enfermedad sobre esa especie modifica el parámetro de su razón de crecimiento. Es decir, cambiar la ecuación de  $dz/dt$  a

$$\frac{dz}{dt} = \zeta z(1 - z) + yz,$$

donde  $\zeta$  es una constante cercana a 1. Las ecuaciones para  $dx/dt$  y  $dy/dt$  permanecen sin cambio.

- (a) Encuentre los puntos de equilibrio de este nuevo sistema. [Sugerencia: Los puntos dependerán del parámetro  $\zeta$ . Recuerde,  $\zeta$  es cercano a 1.]
  - (b) ¿Qué efecto tiene un decremento de  $\zeta$  sobre la población de equilibrio donde las tres especies coexisten?
  - (c) ¿Es el cambio en el punto de equilibrio lo que usted esperaba?
8. Además del mal tiempo durante el invierno de 1996-1997, la población de alces en la isla Royale fue también atacada por las garrapatas de la madera.\* Podemos considerar a las garrapatas como otro depredador de los alces.
- (a) Suponga que las garrapatas comen sólo sangre de alce. Incorpore el efecto de las garrapatas en el modelo. [Sugerencia: Introduzca una nueva variable dependiente.]
  - (b) Analice los puntos de equilibrio de su nuevo modelo.

\* Vea “Winter Devastates Island’s Moose”, por Les Line, en el *New York Times Science Section*, 1 de abril de 1997.

## 5.6 FORZAMIENTO PERIÓDICO DE SISTEMAS NO LINEALES Y CAOS

Hasta ahora en este capítulo hemos analizado sólo sistemas autónomos no lineales. Por otra parte, en el capítulo 4 encontramos muchas importantes ecuaciones de segundo orden no autónomas. En particular, las ecuaciones del oscilador armónico periódicamente forzado sólo dependían del tiempo y exhibían comportamientos muy interesantes. Por ejemplo, en la sección 4.2 encontramos que el forzamiento periódico afecta la amplitud de las soluciones oscilantes y puede incluso ocasionar que el sistema “explote” en el caso del forzamiento resonante. En la sección 4.5 estudiamos también un sistema no lineal particular con forzamiento periódico (el puente del estrecho de Tacoma) y vimos que éste tenía un comportamiento sorprendente. En esta sección continuamos con el estudio de sistemas no lineales excitados periódicamente.

Como en el de Lorenz, esos sistemas son ejemplos que a menudo exhiben un comportamiento *caótico*. En este contexto, la palabra caótico significa que las soluciones exhiben un número infinito de comportamientos cualitativamente diferentes. Además, esas soluciones diferentes están empacadas de forma muy estrecha entre sí, de modo que cualquier cambio en las condiciones iniciales tiene un efecto radical a largo plazo en la solución. Por esas razones, es imposible encontrar soluciones analíticas para un sistema caótico debido a que existe una gran diversidad de soluciones. También es imposible un análisis cualitativo completo de las soluciones por la misma razón. A continuación estudiaremos algunos aspectos del comportamiento sorprendente de esos sistemas, y que nos servirán de herramientas para reconocer el “caos” cuando lo encontremos en otros sistemas. Dichos sistemas son el tema de activas investigaciones en matemáticas. Si nuestra presentación parece incompleta, se debe a que una parte de la historia aún debe ser descubierta.

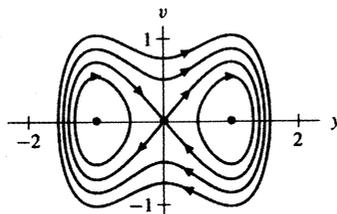
### Una ecuación de Duffing forzada periódicamente

Comenzamos con un ejemplo de un sistema no lineal que hemos “entendido completamente”, es decir, que podemos dibujar su plano fase y describir el comportamiento de todas las soluciones generadas. Luego agregamos un término de forzamiento periódico y desarrollamos los procedimientos para obtener información del sistema resultante no autónomo.

El sistema no lineal que consideramos es una ecuación de Duffing de la forma

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= y - y^3.\end{aligned}$$

Éste es un sistema hamiltoniano con energía  $H(y, v) = v^2/2 - y^2/2 + y^4/4$ . Podemos dibujar entonces el plano fase para este sistema dibujando las curvas de nivel de  $H$  (vea la figura 5.48).



**Figura 5.48**

Plano fase para el sistema

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= y - y^3.\end{aligned}$$

El sistema tiene dos puntos de equilibrio centros en  $(\pm 1, 0)$  y uno de punto silla en  $(0, 0)$ . Las soluciones que tienden al punto silla cuando  $t \rightarrow -\infty$  también se acercan a ese punto cuando  $t \rightarrow +\infty$ . Todas las demás soluciones son periódicas, y se mueven alrededor de uno de los centros o de los tres puntos de equilibrio.

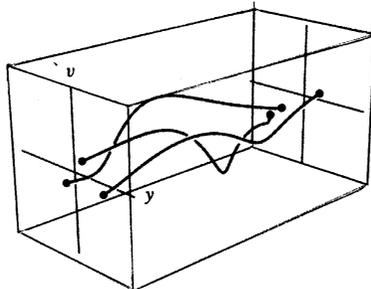
Modificamos este sistema agregando un término de forzamiento senoidal para obtener

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= y - y^3 + \epsilon \sin t.\end{aligned}$$

Note que la amplitud del forzamiento está dado por  $\epsilon$  y el periodo es  $2\pi$  (vea los ejercicios para la interpretación de este sistema como ecuación de segundo orden).

## El mapa de retorno

Como señalamos en la sección 4.1, las herramientas usuales para tratar con sistemas (el campo vectorial, el campo de direcciones y el plano fase) no son importantes en sistemas no autónomos porque el campo vectorial cambia con el tiempo. En realidad, necesitamos un retrato tridimensional con ejes  $y$ ,  $v$  y  $t$ . En ese caso, podríamos imaginar que las soluciones se mueven a lo largo de curvas en el espacio tridimensional  $y$ - $v$ - $t$ . En la figura 5.49 se ha intentado representar este tipo de retrato. Esta figura contiene sólo tres soluciones  $y$ , sin embargo, es bastante difícil visualizarlas; además, para entender su comportamiento a largo plazo, tendríamos que extender el eje  $t$  bastante lejos. Necesitamos encontrar una mejor manera de representar las soluciones.



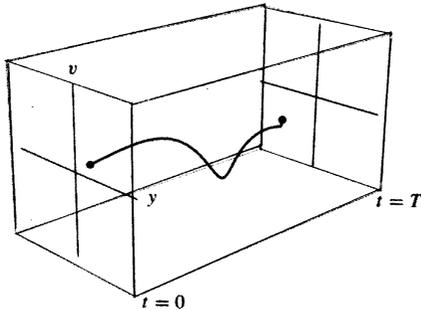
**Figura 5.49**

Tres soluciones del sistema

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= y - y^3 + \epsilon \sin t\end{aligned}$$

en el espacio  $y$ - $v$ - $t$ .

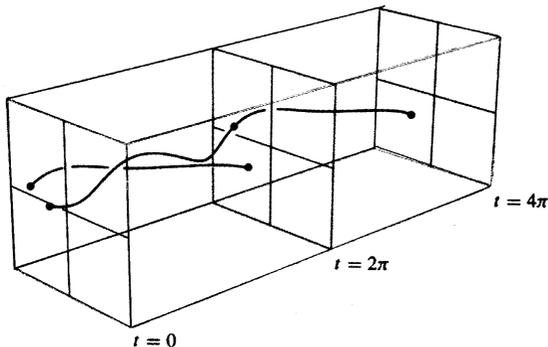
Para representar las soluciones de este sistema usamos una idea de la primera persona que vio y entendió las ramificaciones de los sistemas caóticos, el matemático Henri Poincaré. El objetivo es reemplazar el retrato tridimensional en la figura 5.49 por otro bidimensional. Fijemos un punto inicial  $y(0) = y_0$ ,  $v(0) = v_0$ . En la figura 5.50 está representado por un punto en el plano  $t = 0$ . Si dibujamos el plano  $t = T$  para algún tiempo posterior  $T$  en el espacio  $y$ - $v$ - $t$ , podemos preguntar en qué punto se tocan la solución que empieza en  $(y_0, v_0)$  en el tiempo  $t = 0$  y el plano. Siguiendo la curva solución hasta el tiempo  $t = T$ , podemos determinar dónde se localiza este punto de reunión (vea la figura 5.50).

**Figura 5.50**

Punto inicial sobre el plano  $t = 0$  e intersección de la solución sobre el plano  $t = T$ .

Ahora aprovechamos el hecho de que el término de forzamiento es periódico. Tomamos  $T = 2\pi$ . La solución que se inicia en  $t = 0$  interseca el plano  $t = 2\pi$  en algún punto  $(y_1, v_1) = (y(2\pi), v(2\pi))$ . Una manera de seguir esta solución más adelante es prolongar el eje  $t$ . Sin embargo, como el forzamiento es periódico, las ecuaciones diferenciales también lo son, y su periodo es  $2\pi$ . Por consiguiente, la curva que se inicia en  $(y_1, v_1)$  cuando  $t = 2\pi$  es una traslación en  $2\pi$  unidades de tiempo de la curva que se inicia en  $(y_1, v_1)$  sobre el plano  $t = 0$ . En ese caso podemos seguir la solución por otras  $2\pi$  unidades de tiempo sin prolongar el eje  $t$ . Cuando transcurren  $2\pi$  unidades más, la solución vuelve a encontrar de nuevo el plano  $t = 2\pi$ , esta vez en un punto  $(y_2, v_2)$ , que es igual a  $(y(4\pi), v(4\pi))$ . Podemos repetir el proceso moviendo el punto  $(y_2, v_2)$  al plano  $t = 0$  y luego seguir la solución otras  $2\pi$  unidades de tiempo (vea la figura 5.51).

Este retrato aún es muy complicado cuando  $t$  es grande ya que hay muchas ramas de la solución que van de  $t = 0$  a  $t = 2\pi$ . Sin embargo, el comportamiento de la solución puede recuperarse de un retrato más simple. Supongamos que lo giramos de manera que el eje  $t$  entra directamente hacia el papel. Sólo veremos los puntos en que la solución penetra al plano  $t = 0$ , es decir, los puntos  $(y_0, v_0) = (y(0), v(0))$ ,  $(y_1, v_1) = (y(2\pi), v(2\pi))$ ,  $(y_2, v_2) = (y(4\pi), v(4\pi))$ , etc. Esta secuencia de puntos es suficiente para dar una buena idea del comportamiento a largo plazo de la solución.

**Figura 5.51**

El espacio fase de  $0 \leq t \leq 4\pi$ . Note que la sección de  $2\pi$  a  $4\pi$  es justamente una traslación de la sección de  $0$  a  $2\pi$ .

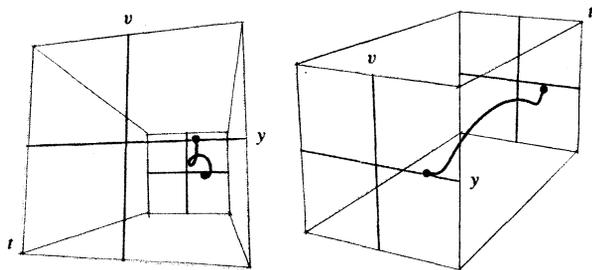
Reemplazamos entonces el retrato de las curvas solución en el espacio de fase tridimensional por una función que lleva un valor inicial dado  $(y_0, v_0)$  en el plano  $t = 0$  a su punto de “primer retorno”  $(y_1, v_1)$ , también en el plano  $t = 0$ . Esta función se llama el **mapa de retorno** o **mapa de retorno de Poincaré**; imaginamos los puntos en el plano  $t = 0$  llevados o “mapeados” al siguiente punto de intersección con este plano por el mapa de retorno. Aplicando repetidamente esta función, vemos los puntos en que la solución penetra el plano en sucesión.

### Mapa de retorno para el sistema no forzado

Para ilustrar este procedimiento, consideremos primero un caso simple. Sea  $\epsilon = 0$ , por lo que tenemos un sistema no forzado

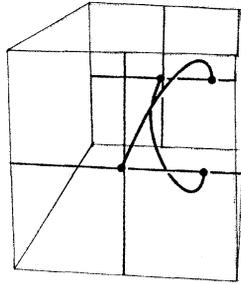
$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= y - y^3.\end{aligned}$$

Éste es un sistema autónomo, pero usamos las ideas anteriores para dar un retrato del mapa de retorno en este caso especial. Si comenzamos con una condición inicial cerca del punto de equilibrio en  $(1, 0)$ , entonces la solución en el espacio  $y-v-t$  se mueve en espiral alrededor de este punto de equilibrio (vea la figura 5.52). El mapa de retorno para esta solución toma puntos sobre esta curva a intervalos de tiempo de  $2\pi$ , y proporciona una secuencia de puntos sobre un lazo alrededor de  $(1, 0)$ . Si tomamos una condición inicial distinta más alejada de  $(1, 0)$ , la solución se mueve en espiral a una razón diferente alrededor de  $(1, 0)$ , y el mapa de retorno resultante da una secuencia de puntos que se desplazan más lento alrededor de  $(1, 0)$ . Los puntos de equilibrio del sistema dan soluciones que siempre regresan al mismo lugar sobre el plano. Dichos puntos se denominan **puntos fijos** del mapa de retorno de Poincaré. Finalmente, las soluciones que tienden desde el punto de equilibrio del punto silla y retornan a sí mismas, dan una secuencia de puntos que parten del origen y regresan a él a través del mapa de retorno de Poincaré (vea la figura 5.53).



**Figura 5.52**

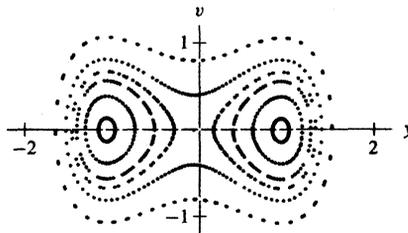
En el espacio  $y-v-t$ , dos vistas de una solución con punto inicial cerca de  $(1, 0)$  para el sistema no forzado.

**Figura 5.53**

Retrato del espacio  $y$ - $v$ - $t$  de una solución que va desde el punto de silla en  $(0, 0)$  cuando  $t \rightarrow -\infty$  de regreso hasta  $(0, 0)$ , cuando  $t \rightarrow +\infty$ , y el correspondiente mapa de retorno de Poincaré.

En la figura 5.54 mostramos los resultados de aplicar el mapa de retorno a varias condiciones iniciales diferentes en el sistema no forzado. En este caso, el mapa de retorno de Poincaré se parece mucho al plano fase. Las condiciones iniciales cerca de  $(\pm 1, 0)$  dan soluciones que permanecen sobre lazos cerrados alrededor de  $(\pm 1, 0)$ , por lo que en el mapa de Poincaré esas soluciones dan secuencias de puntos sobre lazos alrededor de  $(\pm 1, 0)$ . La distribución de esos puntos difiere a distintos radios, porque la razón a la que las soluciones se mueven en espiral alrededor del origen disminuye conforme el radio aumenta. Las órbitas que conectan el punto fijo de punto silla al mismo dan secuencias que van del origen y de regreso a éste.

Igual que con el espacio fase, es muy instructivo observar esos retratos conforme son calculados. El orden en que aparece la secuencia de puntos en el mapa de retorno da mucha más información que el retrato estático. Sin embargo, aún podemos usar el mapa completo de Poincaré para extraer conclusiones acerca de las soluciones.

**Figura 5.54**

El mapa de retorno de Poincaré para muchas soluciones diferentes del sistema

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= y - y^3.\end{aligned}$$

### Mapa de retorno para el sistema forzado no lineal

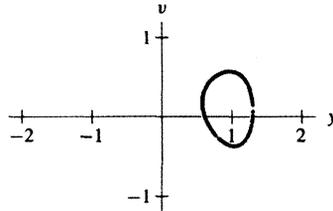
Ahora volvemos al sistema forzado no lineal

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= y - y^3 + \epsilon \sin t.\end{aligned}$$

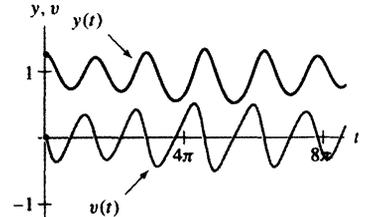
Para calcular soluciones numéricamente necesitamos escoger un valor de  $\epsilon$ . Con este fin, escogemos  $\epsilon = 0.06$ , pero en los ejercicios se consideran otros valores de  $\epsilon$ . Nuestro ob-

jetivo es usar el mapa de retorno de Poincaré para interpretar el comportamiento de las soluciones de este sistema.

Fijamos una condición inicial cerca del centro  $(1, 0)$ , calculamos la solución en el espacio  $y-v-t$  y luego el retrato del mapa de retorno de Poincaré. La imagen resultante se encuentra en la figura 5.55, y la gráfica  $y(t)$  está dada en la figura 5.56. Podemos usar este retrato para predecir el comportamiento de la solución: por lo menos para tiempos que son múltiplos de  $2\pi$ , la posición de la solución permanece relativamente cerca de  $(1, 0)$ .



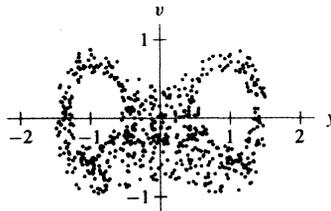
**Figura 5.55**  
Mapa de retorno de Poincaré para una solución con punto inicial cerca de  $(1, 0)$  para el sistema forzado de Duffing con  $\epsilon = 0.06$ .



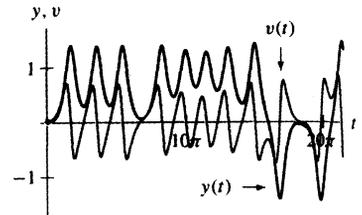
**Figura 5.56**  
Las gráficas  $y(t)$  y  $v(t)$  de las soluciones en la figura 5.55.

Las soluciones que se inician cerca del punto silla en el origen son mucho más interesantes. El mapa de retorno de Poincaré para tal solución se da en la figura 5.57. En vez de una curva simple que conecte el origen consigo mismo, toda a un lado del plano fase, vemos una nube de puntos en ambos lados del origen.

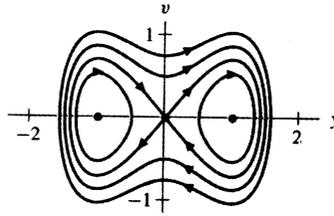
La figura 5.57 nos permite predecir que una solución que se inicia cerca del origen se comporta de manera errática. La coordenada  $y$  toma valores tanto positivos como negativos. Como los puntos no parecen seguir un patrón regular, podemos predecir que la gráfica  $y(t)$  de esta solución oscila sin ningún patrón particular. Esto es lo que observamos en la figura 5.58.



**Figura 5.57**  
Mapa de retorno de Poincaré para una solución con punto inicial cerca del origen, para el sistema no lineal forzado con  $\epsilon = 0.06$ .



**Figura 5.58**  
Las gráficas  $y(t)$  y  $v(t)$  de las soluciones en la figura 5.57.

**Figura 5.59**

Plano fase para el sistema no forzado

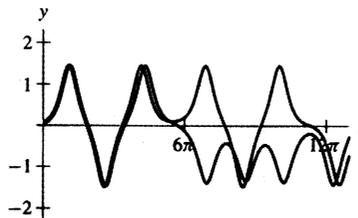
$$\frac{dy}{dt} = v$$

$$\frac{dv}{dt} = y - y^3.$$

Es posible obtener alguna idea de por qué esta solución se comporta como lo hace, observando de nuevo el plano fase del sistema no forzado (vea la figura 5.59). Una solución que se inicia cerca del origen, digamos justo a la derecha de  $(0, 0)$  cerca de la separatriz que sale del origen, se mueve alejándose de éste durante cierto tiempo. Luego forma un lazo y retorna y se aproxima a  $(0, 0)$ . El término de forzamiento es muy pequeño, por lo que tiene poco efecto sobre la solución cuando está lejos de  $(0, 0)$ , ya que el campo vectorial tiene una magnitud relativamente pequeña en esta región. Esperamos entonces que la solución retorne a esta vecindad cerca de la separatriz de entrada. Cuando la solución está cerca del origen, el campo vectorial del sistema no forzado es pequeño, por lo que el forzamiento se vuelve más importante. Cuando la solución está cerca de  $(0, 0)$ , si el término de forzamiento está empujando la solución hacia arriba (es decir,  $0.06 \sin t > 0$ ), entonces la solución se mueve hacia la región  $v > 0$  y por consiguiente sigue a la separatriz de salida de regreso hacia el medio plano derecho. Si, por otra parte, el término de forzamiento es negativo cuando la solución está cerca del origen, en ese caso es posible que haya suficiente “empuje” para mover la solución por debajo de la separatriz de entrada. En esta situación la solución procede hacia el medio plano izquierdo y, una vez ahí, describe un lazo alrededor del punto de equilibrio izquierdo.

Así entonces, en cada lazo, la solución del sistema forzado debe “tomar una decisión” cuando regresa a la vecindad del origen. Puede entrar al medio plano derecho o al medio plano izquierdo. ¿Qué dirección toma la solución? Depende de la posición de la solución respecto al origen y del signo del término de forzamiento cuando se aproxima al origen. Esto significa que la opción depende entonces del tiempo.

En consecuencia, no podemos predecir qué sucede cuando la condición inicial es modificada ligeramente. La solución se mueve lentamente cuando está cerca de  $(0, 0)$ , por lo que un ligero cambio de la condición inicial que empuje a la solución más cerca del origen representa una diferencia importante en el tiempo que la solución pasa cerca de  $(0, 0)$ . Esto a su vez afecta el tiempo que le toma regresar a la solución al origen y, por consiguiente, puede influir a qué lado del plano  $y$ - $v$  entrará después. Por tanto, una pequeña diferencia en la condición inicial puede cambiar de manera radical el comportamiento a largo plazo de la solución. Esto se evidencia en la figura 5.60, donde se muestran las grá-

**Figura 5.60**Las gráficas  $y(t)$  de dos soluciones cuyos puntos iniciales están muy cercanos entre sí.

ficas  $y(t)$  de dos soluciones con condiciones iniciales muy cercanas entre sí. Durante un tiempo permanecen cercanas, pero después están separadas lo suficiente para tomar decisiones diferentes sobre qué camino seguir cuando están cerca del origen. Después de este tiempo, las soluciones son totalmente distintas.

### Verificación de la realidad

Sabemos que el sistema es “determinístico”. Este comportamiento de las soluciones es algo frustrante, puesto que está completamente determinado por el lado derecho del sistema de ecuaciones diferenciales. Sin embargo, cuando observamos las soluciones, se comportan una manera que parece no tener ningún patrón particular. Incluso hemos antropomorfizado las soluciones diciendo cosas como “la solución decide qué camino seguir”. Las soluciones no piensan, y no tienen que hacerlo puesto que su comportamiento está determinado por el lado derecho de la ecuación diferencial. Lo que pasa es que un cambio muy leve en las condiciones iniciales puede generar un cambio drástico en el comportamiento a largo plazo del sistema.

Si bien este tipo de comportamiento no parece usual comparado con el de las ecuaciones diferenciales que hemos estudiado en secciones previas, no es tan poco común en la naturaleza. Todos los sistemas físicos como el flujo de agua en una corriente turbulenta, los patrones del tiempo meteorológico en la Tierra y aun el lanzamiento de una moneda se comportan de esta manera. Esos sistemas son determinísticos, ya que obedecen leyes estrictas de la física. Esto no implica que sean predecibles. Un pequeño cambio en las condiciones iniciales puede conducir a una diferencia radical en su comportamiento.

Incluso es peligroso confiar en las simulaciones numéricas de esos sistemas. Sabemos que todo método numérico sólo proporciona aproximados de las soluciones. Hay pequeños errores en cada paso de la simulación. Para un sistema como el de arriba, un pequeño error en la aproximación numérica nos da una solución cercana que es ligeramente diferente de la esperada. Pero las soluciones cercanas pueden tener comportamiento a largo plazo radicalmente diferentes. En ese caso, una simulación numérica puede dar resultados muy diferentes de la solución deseada.

Ésta es una razón por la que la predicción del tiempo a largo plazo (más allá de cinco días) no es usualmente muy exacta. Un conocimiento incompleto de los sistemas climáticos y errores en las simulaciones numéricas conducen a predicciones que pueden estar lejos de ser correctas.

## El péndulo forzado periódicamente

Como un segundo ejemplo de un sistema no lineal forzado periódicamente, volvemos al sistema que modela el movimiento de un péndulo. Podemos imaginar un péndulo sobre una mesa al que se estimula cada cierto periodo. Resulta que gran parte del comportamiento observado antes también ocurre para este sistema.

### Las ecuaciones

Las ecuaciones del péndulo forzado periódicamente con masa 1 y longitud de brazo 1 son

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= -g \operatorname{sen} \theta + \epsilon \operatorname{sen} t,\end{aligned}$$

donde  $g$  es la constante gravitatoria. El término de forzamiento  $\epsilon \operatorname{sen} t$  modela una fuerza externa que empuja periódicamente al péndulo en sentidos horario y antihorario con am-

plitud  $\epsilon$  y periodo  $2\pi$ . Por conveniencia suponemos que se han escogido las unidades de tiempo y distancia y que  $g = 1$ ; nuestro sistema es entonces

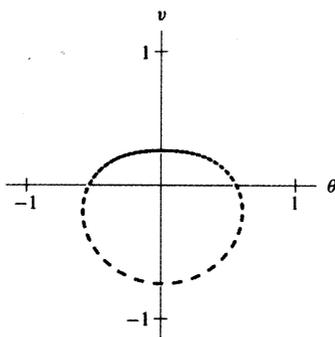
$$\frac{d\theta}{dt} = v$$

$$\frac{dv}{dt} = -\operatorname{sen}\theta + \epsilon \operatorname{sen}t.$$

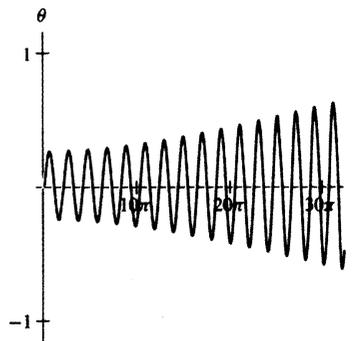
### El mapa de retorno

Construimos el mapa de retorno para el sistema del péndulo forzado exactamente igual que antes. El periodo del término de forzamiento es de nuevo  $2\pi$ , por lo que seguimos las soluciones en el espacio  $\theta$ - $v$ - $t$ , comenzando en el plano  $t = 0$  y marcando el lugar en que cruzan el plano  $t = 2\pi$ .

Para los ejemplos siguientes, fijamos  $\epsilon = 0.01$ ; pero en los ejercicios se consideran otros valores de  $\epsilon$ . En la figura 5.61 mostramos el mapa de retorno de Poincaré para una solución con condición inicial cerca de  $(0, 0)$ . El lazo espeso resultante pertenece a una solución que oscila con amplitud variable. La gráfica  $\theta(t)$  de la misma solución en la figura 5.62 muestra esta oscilación.



**Figura 5.61**  
Mapa de retorno de Poincaré para el sistema del péndulo periódicamente forzado con  $\epsilon = 0.01$ , para una solución con condición inicial cerca de  $(0, 0)$ .



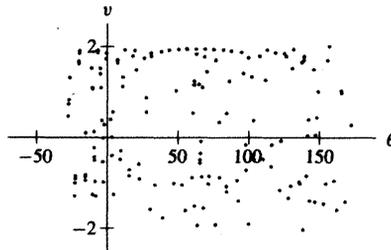
**Figura 5.62**  
Gráfica en el plano  $t\theta$  de la solución en la figura 5.61. (La amplitud de la oscilación permanece acotada para toda  $t$ .)

Las condiciones iniciales cerca de  $(0, 0)$  para el sistema del péndulo forzado corresponden a echar a andar el péndulo con un pequeño ángulo y con pequeña velocidad. En esta situación, el péndulo no forzado (sin amortiguamiento) oscila para siempre con amplitud pequeña constante. La adición del término de forzamiento significa que, igual que para el oscilador armónico forzado, unas veces empuja en la dirección del movimiento haciendo que el péndulo oscile más arriba, y algunas otras opone resistencia al movimiento haciendo que el péndulo oscile menos. A diferencia del oscilador armónico, el periodo del péndulo depende de la amplitud. Por tanto, un forzamiento agrega y resta energía del sis-

tema de modo que, a largo plazo, se vuelve muy complicado. (Esto no es evidente en la figura porque el forzamiento es pequeño.)

### Soluciones cerca de los puntos de equilibrio de punto silla

La figura 5.63 muestra el mapa de retorno de Poincaré para una solución de la ecuación del péndulo forzado periódicamente ( $\epsilon = 0.01$ ) con condición inicial cerca de  $(-\pi, 0)$ . Esos puntos forman una “nube” sin ninguna estructura particular. Además, la coordenada  $\theta$  resulta bastante grande. Esto significa que el brazo del péndulo ha girado por completo varias veces en una dirección.



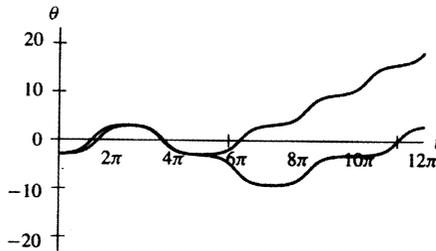
**Figura 5.63**

Mapa de Poincaré para el sistema del péndulo periódicamente forzado con  $\epsilon = 0.01$ , para una solución con condición inicial cerca de  $(-\pi, 0)$ .

Como ocurre en el sistema forzado Duffing, siempre que la solución se aproxima a un punto de equilibrio de punto silla, debe “decidir” qué camino seguir. Si permanece en el medio plano superior, entonces la coordenada  $\theta$  de la solución se incrementa en un múltiplo de  $2\pi$  antes de retornar a la vecindad de otro punto silla. Si escoge entrar a la parte inferior del medio plano, entonces la coordenada  $\theta$  disminuye en  $2\pi$  antes de hacer otra elección. Si graficamos la coordenada  $\theta$  de la solución arriba del plano  $t\theta$ , vemos que se desplaza de manera muy irregular. En particular, es posible que se vuelva muy grande positivamente (o negativamente) si el péndulo “decide” girar de pronto en la misma dirección (vea los ejercicios 5-8).

La decisión de qué camino sigue la solución cuando está cerca de un punto silla depende del signo del término de forzamiento. En ese momento el comportamiento de la solución depende muy levemente de la condición inicial. Si dos soluciones se inician cerca de  $(-\pi, 0)$  con casi la misma condición inicial, al final se separan y se vuelven muy diferentes (vea la figura 5.64).

De los retratos anteriores podemos deducir la existencia de un comportamiento interesante en el sistema del péndulo forzado. Una solución del sistema del péndulo forzado con condición inicial cerca de  $(-\pi, 0)$  corresponde a una posición inicial del péndulo que es casi vertical pero con muy poca velocidad. Por supuesto, el péndulo oscila hacia abajo. Durante la oscilación, el forzamiento tiene muy poca influencia en el movimiento del péndulo.



**Figura 5.64**

Las gráficas  $\theta(t)$  para dos soluciones de la ecuación del péndulo periódicamente forzado con condiciones iniciales casi iguales.

Cuando el péndulo oscila casi hasta la posición vertical, se retarda de nuevo y el efecto del término de forzamiento es más pronunciado; cuando está cerca de la parte superior de la oscilación, el término de forzamiento lo “empuja sobre la parte superior” de modo que hace otra vuelta en la misma dirección, o lo “jala de regreso” y oscila de regreso al camino por el que vino. ¿Qué camino toma el péndulo? Esto podemos saberlo a partir del signo del término de forzamiento, que a su vez depende del tiempo que le toma llegar al péndulo a la parte superior de su oscilación. Como el péndulo se mueve muy lento cerca de la parte superior de su trayectoria, un pequeño cambio en las condiciones iniciales puede generar un cambio drástico en el tiempo y, por consiguiente, ocasionar una modificación en la dirección del péndulo.

Recalcamos que el tipo de razonamiento físico dado con anterioridad no pretende reemplazar los retratos de los mapas de retorno de Poincaré ni el análisis de las soluciones. Aunque el razonamiento físico tiene sentido, no nos dice si un término de forzamiento con  $\epsilon = 0.01$  es suficientemente grande para ocasionar este tipo de comportamiento.

## Moraleja

La moraleja de esta sección es que incluso sistemas que “entendemos” como el péndulo pueden volverse muy complicados cuando se agregan términos adicionales como el forzamiento forzado. El sistema del péndulo forzado periódicamente a primera vista no parece tan complicado, pero del mapa de retorno de Poincaré vemos que sus soluciones se comportan de manera muy impredecible. Un pequeño cambio en la posición inicial con frecuencia tiene un efecto radical sobre el comportamiento de la solución.

Si este tipo de comportamiento, que en la actualidad se llama **caos**, puede observarse en un sistema tan simple como el del péndulo forzado periódicamente, no debería sorprender que también pueda encontrarse en la naturaleza. Esto no es un descubrimiento nuevo. Alrededor de 1880, Henri Poincaré fue quien consideró por primera vez la posibilidad de la existencia del “caos” en la naturaleza. Se encontraba estudiando el movimiento de un pequeño asteroide bajo la influencia de una estrella (el Sol) y un planeta grande (Júpiter). Poincaré desarrolló el mapa de retorno para investigar el comportamiento de este sistema. Lo notable es que entonces no se tenía el beneficio de observar las simulaciones numéricas de las soluciones, como lo hacemos hoy en día. Sin embargo, él pudo ver que el mapa de retorno se comportaría de manera muy complicada y sabiamente no intentó dibujarlo.

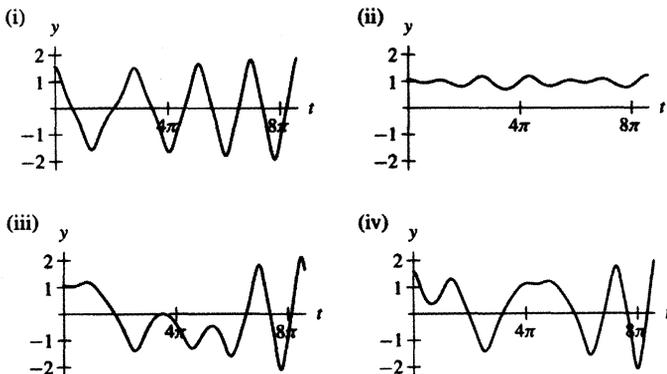
**EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 5.6**

En los ejercicios 1-4 se dan las gráficas de mapas de retorno de Poincaré para cuatro órbitas distintas, con cuatro valores diferentes de  $\epsilon$ , y condiciones iniciales para la ecuación de Duffing forzada periódicamente

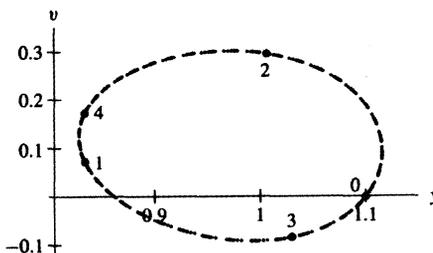
$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= y - y^3 + \epsilon \sin t. \end{aligned}$$

descrita en el texto. Además, también se proporcionan cuatro gráficas  $y(t)$  para soluciones de este sistema.

- (a) Asocie los mapas de retorno de Poincaré con las gráficas  $y(t)$ .
- (b) En un ensayo breve describa cómo hizo esta asociación y explique el comportamiento cualitativo de la solución.

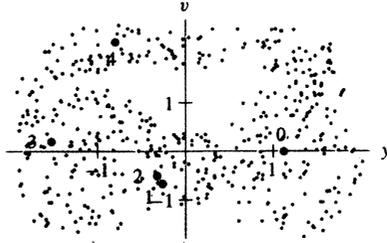


1. Para  $\epsilon = 0.1$ ,  $y(0) = 1.1$ ,  $v(0) = 0$ .



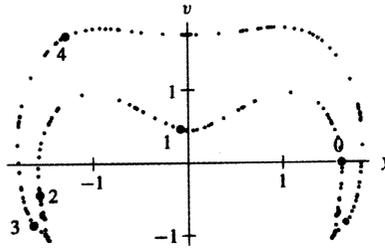
Mapa de retorno de Poincaré con 500 iteraciones. Se indican los primeros cuatro retornos.

2. Para  $\epsilon = 0.4$ ,  $y(0) = 1.1$ ,  $v(0) = 0$ .



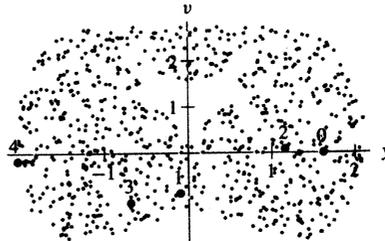
Mapa de retorno de Poincaré con 500 iteraciones.  
Se indican los primeros cuatro retornos.

3. Para  $\epsilon = 0.1$ ,  $y(0) = 1.6$ ,  $v(0) = 0$ .



Mapa de retorno de Poincaré con 200 iteraciones.  
Se indican los primeros cuatro retornos.

4. Para  $\epsilon = 0.5$ ,  $y(0) = 1.6$ ,  $v(0) = 0$ .



Mapa de retorno de Poincaré con 800 iteraciones.  
Se indican los primeros cuatro retornos.

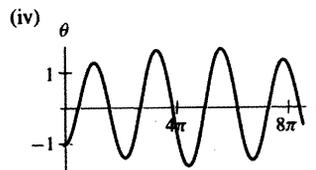
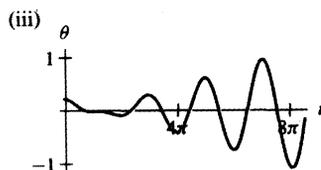
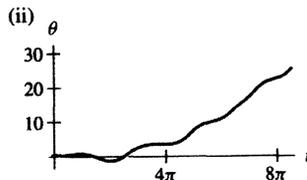
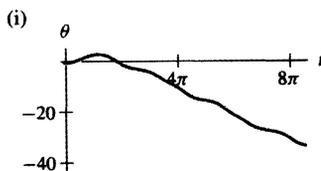
En los ejercicios 5-8 se dan los mapas de retorno de Poincaré para cuatro órbitas diferentes con cuatro valores distintos de  $\epsilon$  y condiciones iniciales para el sistema del péndulo forzado periódicamente

$$\frac{d\theta}{dt} = v$$

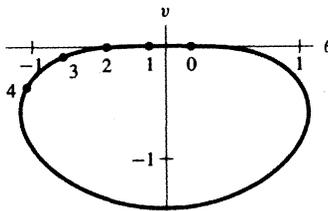
$$\frac{dv}{dt} = -\text{sen}\theta + \epsilon \text{sen}t$$

descrito en el texto. Se dan también cuatro gráficas  $\theta(t)$  para soluciones de este sistema.

- (a) Asocie los mapas de retorno de Poincaré con las gráficas  $\theta(t)$ .
- (b) En un ensayo breve explique cómo hizo la asociación y el comportamiento cualitativo de la solución.
- (c) Describa el comportamiento del brazo del péndulo cuando éste sigue la solución indicada.

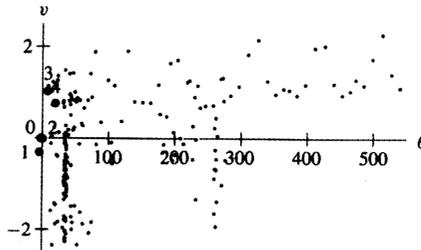


5. Para  $\epsilon = 0.1$ ,  $\theta(0) = .2$ ,  $v(0) = 0$ .



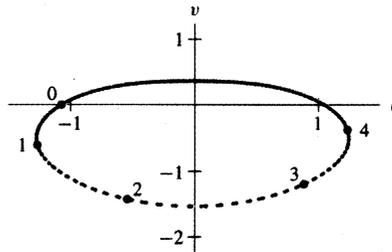
Mapa de retorno de Poincaré con 1 000 iteraciones. Se indican los primeros cuatro retornos.

6. Para  $\epsilon = 0.5$ ,  $\theta(0) = 0.2$ ,  $v(0) = 0$ .



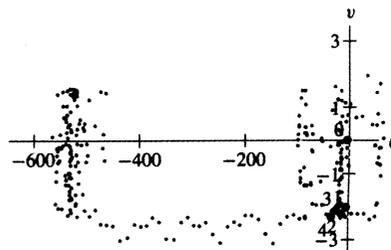
Mapa de retorno de Poincaré con 250 iteraciones.  
Se indican los primeros cuatro retornos.

7. Para  $\epsilon = 0.1$ ,  $\theta(0) = -1.06$ ,  $v(0) = 0$ .



Mapa de retorno de Poincaré con 400 iteraciones.  
Se indican los primeros cuatro retornos.

8. Para  $\epsilon = 0.5$ ,  $\theta(0) = -1.06$ ,  $v(0) = 0$ .

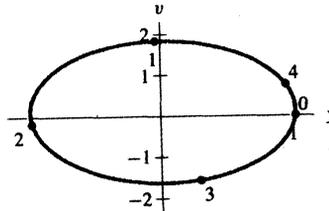


Mapa de retorno de Poincaré con 250 iteraciones.  
Se indican los primeros cuatro retornos.

9. El mapa de retorno de Poincaré para una solución del oscilador armónico forzado periódicamente

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= -3y + 0.2 \operatorname{sen} t\end{aligned}$$

se da a continuación.



Mapa de retorno de Poincaré para el sistema del oscilador armónico forzado con condiciones iniciales  $y(0) = 1$ ,  $v(0) = 0$ .

- Encuentre la solución con la condición inicial  $y(0) = 1$ ,  $v(0) = 0$ .
  - Explique por qué el mapa de retorno de Poincaré tiene este aspecto.
  - ¿Qué aspecto tendría el mapa de retorno de Poincaré para la solución con  $y(0) = 4$ ,  $v(0) = 0$ ?
  - Diga por qué el mapa de retorno de Poincaré para el sistema del oscilador armónico forzado es diferente del mapa de Poincaré para el péndulo forzado.
10. Describa y esboce el mapa de retorno de Poincaré para la solución del sistema del oscilador armónico forzado

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= -4y + 0.1 \operatorname{sen} 2t.\end{aligned}$$

[Sugerencia: Trate de resolver este problema cualitativamente, con sólo pocos cálculos. ¿Cuál es la frecuencia natural del sistema?]

En este laboratorio continuamos nuestro estudio de las ecuaciones de segundo orden considerando “resortes no lineales”. En la sección 3.6 desarrollamos el modelo de un resorte con base en la ley de Hooke, la cual establece que la fuerza restauradora de un resorte es proporcional a su desplazamiento; esta suposición conduce a la ecuación de segundo orden

$$m \frac{d^2y}{dt^2} + k_s y = 0.$$

Como la ecuación diferencial resultante es lineal, decimos que el resorte es lineal. En este caso la fuerza restauradora es  $-k_s y$ . Suponemos además que la fuerza de fricción o de amortiguamiento es proporcional a la velocidad. La ecuación de segundo orden resultante es

$$m \frac{d^2y}{dt^2} + k_d \frac{dy}{dt} + k_s y = 0.$$

La ley de Hooke es un modelo idealizado que funciona bien para oscilaciones pequeñas. De hecho, la fuerza restauradora es aproximadamente lineal si el desplazamiento del resorte desde su posición de equilibrio es pequeño, pero en general es más exacto modelar la fuerza restauradora por una cúbica de la forma  $-ky + by^3$ , donde  $b$  es pequeña respecto a  $k$ . Si  $b$  es negativa, se dice que el resorte es duro, y si  $b$  es positiva, es blando. En este laboratorio consideramos el comportamiento de los resortes duros y blandos para valores particulares de los parámetros. (Su profesor le indicará qué parámetros usar de la tabla 5.1.)

En su reporte deberá analizar los planos fase y las gráficas  $y(t)$  y  $v(t)$  para describir el comportamiento a largo plazo de las soluciones de las ecuaciones:

1. (Resorte duro sin amortiguamiento) La primera ecuación que deberá estudiar es la del resorte duro sin amortiguamiento; es decir,  $k_d = 0$  y  $b = b_1$ . Examine las soluciones usando sus gráficas y el plano fase. Considere los periodos de las soluciones periódicas que tienen la condición inicial  $v(0) = 0$ . Esboce la gráfica del periodo como función de la condición inicial  $y(0)$ . ¿Hay un periodo mínimo? ¿Hay un periodo máximo? Si es así, ¿cómo interpreta esos extremos?
2. (Resorte duro con amortiguamiento) Ahora utilice el valor dado de  $k_d$  y  $b = b_1$  para introducir el amortiguamiento en el análisis. En este caso, ¿qué le pasa al comportamiento a largo plazo de las soluciones? Determine el valor del parámetro de amortiguamiento que separa el caso subamortiguado del caso sobreamortiguado.
3. (Resorte blando sin amortiguamiento) Considere el resorte blando que corresponde al valor positivo  $b_2$  de  $b$ . ¿Sobre qué rango de valores y es razonable este modelo? Tome en cuenta los intervalos de las soluciones periódicas que tienen la condición inicial  $v(0) = 0$ . Esboce la gráfica del periodo como función de la condición inicial  $y(0)$ . ¿Hay un periodo mínimo? ¿Hay uno máximo? Use el retrato fase como ayuda para justificar su respuesta.
4. (Resorte blando con amortiguamiento) Usando los valores dados de  $k_d$  y  $b = b_2$ , ¿qué sucede en este caso al comportamiento a largo plazo de las soluciones? Determine el valor del parámetro de amortiguamiento que separa el caso subamortiguado del sobreamortiguado.
5. Desde un punto de vista físico, ¿cuál es la diferencia entre un resorte duro y otro blando?

**Sobre su reporte:** Responda cada uno de los cinco incisos en forma de un pequeño ensayo. Puede ilustrarlos con retratos de los planos fase y gráficas de las soluciones. Sin embargo, sus ensayos deben quedar completos y ser inteligibles sin los retratos. Asegúrese de relacionar el comportamiento de las soluciones con el movimiento de la masa y resorte asociados del sistema.

**Tabla 5.1**

Opciones para los valores de los parámetros. Suponga que la masa  $m = 1$ , a menos que su profesor le indique otro valor.

Opción	$k_s$	$k_d$	$b_1$	$b_2$
1	0.1	0.15	-0.005	0.005
2	0.2	0.20	-0.008	0.008
3	0.3	0.20	-0.009	0.009
4	0.2	0.20	-0.005	0.005
5	0.1	0.10	-0.005	0.005
6	0.3	0.20	-0.007	0.007
7	0.3	0.15	-0.007	0.007
8	0.1	0.15	-0.004	0.004
9	0.2	0.15	-0.005	0.005
10	0.3	0.20	-0.008	0.008

## LABORATORIO 5.2

## Aproximaciones de orden superior para el péndulo

En capítulos previos estudiamos el comportamiento de las ecuaciones lineales homogéneas de segundo orden (como las del oscilador armónico) reduciéndolas a sistemas lineales de primer orden. Este procedimiento de "reducción" también puede aplicarse a ecuaciones no lineales y, además, lo utilizaremos en este laboratorio para estudiar el péndulo ideal y aproximaciones al péndulo.

En el texto modelamos el péndulo ideal por medio de la ecuación no lineal de segundo orden

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0,$$

donde  $\theta$  es el ángulo medido desde la vertical,  $g$  es la constante gravitatoria ( $g = 32$  pies/ $s^2$ ) y  $l$  es la longitud de la barra del péndulo, es decir, el radio del círculo sobre el cual viaja la masa. En este laboratorio compararemos los resultados de la simulación numérica de este modelo con los resultados obtenidos a partir de dos de sus aproximaciones. La primera de ellas es lineal y está dada por

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \theta = 0.$$

La segunda aproximación es cúbica

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \left( \theta - \frac{\theta^3}{6} \right) = 0.$$

Recuerde que la expresión del cálculo  $\theta - \theta^3/6$  representa los primeros dos términos del desarrollo en serie de potencias de  $\sin \theta$  alrededor de  $\theta = 0$ . Estamos especialmente interesados en ver qué tan cerca están las soluciones de las aproximaciones de la ecuación del péndulo ideal de la ecuación original. En particular queremos saber qué tanto se relacionan los periodos de las órbitas de las aproximaciones con los periodos de las órbitas de la ecuación original del péndulo. Su profesor le indicará qué valor del parámetro  $l$  (la longitud del brazo del péndulo) deberá usar. Su reporte debe incluir:

1. Un análisis del retrato fase para las tres ecuaciones. Compárelos desde el punto de vista de qué tan bien las ecuaciones lineal y cúbica aproximan al péndulo ideal.
2. Para estudiar cómo se relacionan los periodos de las órbitas, considere la familia paramétrica de condiciones iniciales  $\theta_0$ , donde  $\theta(0) = \theta_0$  y  $\theta'(0) = 0$  (velocidad inicial nula). En otras palabras, deberá usted estudiar las diversas soluciones que se inician con un ángulo dado y velocidad nula. ¿Para qué intervalos de condiciones iniciales los periodos de las órbitas de

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

y

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\left(\theta - \frac{\theta^3}{6}\right) = 0$$

se aproximan bastante a los periodos de las órbitas del péndulo ideal? (El cálculo de los periodos en la aproximación lineal puede hacerse exactamente usando los procedimientos del capítulo 3. Existen procedimientos analíticos para calcular los periodos de las órbitas de las otras dos ecuaciones, pero en este laboratorio usted debe hacerlo numéricamente.) Trace las gráficas del periodo como función de  $\theta_0$  usando una tabla relativamente pequeña (5, 10 o 15 entradas) de periodos obtenidos mediante una simulación numérica directa del modelo.

3. Otra familia de condiciones iniciales es  $\theta(0) = 0$  y  $\theta'(0) = v_0$ . Aquí la velocidad inicial es el parámetro. Al inicio el péndulo señala directamente hacia abajo con una velocidad dada  $v_0$ . ¿Qué cambia respecto a sus resultados en el párrafo 2 anterior?
4. Suponga que usted fabrica relojes con base en el movimiento de un péndulo. Para cada una de las tres ecuaciones, ¿qué debe hacer para duplicar el periodo de la oscilación?

**Sobre su reporte:** Responda cada uno de los incisos anteriores en forma de un breve ensayo. Sea tan sistemático como sea posible al recopilar sus datos y preséntelos en un formato claro y conciso. Usted puede ilustrar sus ensayos con retratos de planos fase y gráficas de soluciones o de los datos que compile. Sin embargo, su descripción debe quedar completa y ser entendible sin los retratos.

En este laboratorio estudiará usted una familia paramétrica de sistemas no lineales de primer orden que consisten en ecuaciones depredador-presa. La familia es

$$\frac{dx}{dt} = 9x - \alpha x^2 - 3xy$$

$$\frac{dy}{dt} = -2y + xy,$$

donde  $\alpha \geq 0$  es un parámetro. En otras palabras, para valores diferentes de  $\alpha$  tenemos diferentes sistemas. La variable  $x$  es la población de presas (en alguna unidad a escala) y  $y$  es la población depredadora. Para un valor dado de  $\alpha$ , queremos entender qué sucede a ambas especies cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Usted deberá investigar los retratos fase de esas ecuaciones para varios valores de  $\alpha$  en el intervalo  $0 \leq \alpha \leq 5$ . Para iniciarse, ensaye  $\alpha = 0, 1, 2, 3, 4$  y  $5$ . Piense qué significa el retrato fase en términos de la evolución de las poblaciones  $x$  y  $y$ . ¿Dónde se encuentran los puntos de equilibrio? ¿De qué tipo son? ¿Qué le sucede a una curva solución común? Considere también el comportamiento de las soluciones especiales en que  $x = 0$  o  $y = 0$  (las curvas solución se encuentran sobre los ejes  $x$  o  $y$ ).

Determine los valores de bifurcación de  $\alpha$ . Es decir, aquellos donde las  $\alpha$  cercanas conducen a comportamientos “diferentes” en el retrato fase. Por ejemplo,  $\alpha = 0$  es un valor de bifurcación, porque en ese punto el patrón a largo plazo de las poblaciones es significativamente distinto del que muestran cuando  $\alpha$  es ligeramente positiva.

**Sobre su reporte:** Después de determinar todos los valores de bifurcación para  $\alpha$  en el intervalo  $0 \leq \alpha \leq 5$ , estudie una cantidad suficiente de valores específicos de  $\alpha$  para poder analizar todos los diversos escenarios de evolución de la población para esos sistemas. En su reporte debe describir esos escenarios usando los retratos fase y las gráficas  $x(t)$  y  $y(t)$ . Su reporte debe incluir:

1. Un análisis breve del significado de los diversos términos del sistema. Por ejemplo, ¿qué representa  $9x$ ? ¿Y  $3xy$ ?
2. Un análisis de todas las bifurcaciones, incluyendo una en  $\alpha = 0$ . Por ejemplo, ocurre una bifurcación entre  $\alpha = 3$  y  $\alpha = 5$ . ¿Qué significa para la población de depredadores?

Responda las preguntas anteriores en forma de un corto ensayo y respalde sus afirmaciones con ilustraciones seleccionadas. (Recuerde que si bien una buena ilustración puede valer mil palabras, mil ilustraciones usualmente no valen nada.)