LA NATURALEZA ESENCIAL DE LA MATEMÁTICA†

A. N. Kolmogorov

1. Basándonos en lo que se ha discutido ya, ahora podemos volver a algunas conclusiones generales concernientes a la naturaleza de la matemática.

La naturaleza de la matemática fue descrita por Engels en una sección del *Anti-Dühring* y citamos aquí ese notable párrafo. El lector reconocerá fácilmente en la formulación de Engels lo que ya hemos dicho, por ejemplo, respecto a la aritmética y la geometría –y justificadamente– ya que hemos explicado la historia real de los orígenes y desarrollo de la matemática, guiados por una comprensión del materialismo dialéctico. El materialismo dialéctico conduce a resultados verdaderos precisamente porque no impone superficialmente nada a la realidad, sino que examina los hechos como son, i.e. en sus relaciones y desarrollo.

Engels inicia su discusión sobre la naturaleza de la matemática con algunas observaciones críticas sobre las absurdas opiniones de Dühring, en particular, la falsa opinión de que la matemática está comprometida en la creación de la "razón pura", independientemente de la experiencia. Engels escribió:

> Pero lo que no es verdad es que en la matemática pura el entendimiento se ocupe exclusivamente de sus propias creaciones e imaginaciones. Los conceptos de número y figura no han sido tomados sino del mundo real. Los diez dedos con los que los hombres aprendieron a contar, a realizar la primera operación aritmética, no son ni mucho menos una libre creación del entendimiento. Para contar hacen falta no sólo los objetos contables, enumerables, sino también la capacidad de prescindir, al considerar estos objetos, de todas sus demás cualidades que no sean el número, y esta capacidad es resultado de una larga evolución histórica y de la experiencia. También el concepto de figura, igual que el de número, está tomado exclusivamente del mundo externo y no ha nacido de la cabeza, del pensamiento puro. Tenía que haber cosas que tuvieran figura y cuyas figuras fueran comparadas, antes de que se pudiera llegar al concepto de figura. La matemática pura tiene como objeto las formas espaciales y las relaciones cuantitativas del mundo real, es decir, una materia muy real. El hecho de que esa materia aparece en la matemática de un modo sumamente abstracto no puede ocultar sino superficialmente su origen en el mundo externo. Para poder estudiar esas formas y relaciones en toda su pureza hay, empero, que separarlas totalmente de su contenido, poner éste aparte como indiferente; así se consiguen los puntos sin dimensiones, las líneas sin grosor ni anchura, las *a* y *b* y las *x* e *y*, las constantes y las variables, y se llega al final, efectivamente a las propias y libres creaciones e imaginaciones del entendimiento, a saber, a las magnitudes imaginarias. Tampoco la aparente derivación de las magnitudes matemáticas unas de otras prueba su carácter apriorístico, sino sólo su conexión racional. Antes de que se llegara a la idea de deducir la forma de un cilindro de la rotación de un rectángulo alrededor de uno de sus lados ha habido que estudiar un gran número de rectángulos y cilindros reales, aunque de forma imperfecta. Como todas las demás ciencias, la matemática ha nacido de las necesidades de los hombres: de la medición de tierras y capacidades de los recipientes, de la medición del tiempo y de la mecánica. Pero, como en todos los ámbitos del pensamiento, al llegar a cierto nivel de evolución se separan del mundo real, las leyes abstraídas del mismo, se le contraponen como algo independiente, como leyes que le llegan de afuera y según las cuales tiene que disponerse el mundo. Así ha ocurrido en la sociedad y en el Estado, y así precisa mente se aplica luego al mundo la matemática pura, aunque ha sido tomada sencillamente de ese mundo y no representa más que una parte de las formas de conexión del mismo, única razón por la cual es aplicable (*Anti-Dühring.* Ed. Grijalbo, México, 1962, pp. 25-26).

2. Así, Engels enfatiza que la matemática refleja la realidad, que surge de las necesidades prácticas de la

† El presente material fue rescatado de una recopilación de textos publicados por el CCH en 1988, titulada: “Antología de filosofía de las matemáticas”, coordinada por Jesús Salinas Herrera, y que incluye la nota siguiente: “Estos textos pertenecen al libro *La matemática: Su contenido, métodos y significado*, que fueron censurados por la Sociedad Matemática Americana en su traducción del ruso al inglés, y que tampoco aparecen en la traducción del inglés al español editada por Alianza Universidad.” Además, se agrega que: “Fueron recopilados en un folleto titulado: *Visión general de la matemática*, y publicado por los grupos 4010, 4011, 4014 y 4015 de Cálculo I de la Facultad de Ciencias, UNAM.”

Por nuestra parte, encontramos que en la versión que publicó The MIT Press, en 1963, de *Mathematics, its content, methods, and meaning*, y sus posteriores ediciones en inglés, al finalizar el capítulo 1: “A General View of Mathematics” (cuya autoría se atribuye a Aleksandrov y no a Kolmogorov), se incluye la nota que dice: *This section is followed in the original Russian text by two sections entitled "The essential nature of mathematics" and "The laws of the development of mathematics". These sections are omitted in the present translation in view of the fact that they discuss in more detail, and in the more general philosophical setting of dialectical materialism, point of view alreday stated with great clarity in the preceding sections.* Por tanto, y para el lector interesado (a quien sugerimos la lectura del capítulo 1 de la obra en cuestión), queda pendiente precisar la autoría de estas dos secciones, que aquí rescatamos.

gente y que sus primeros conceptos y principios fueron el resultado de un largo desarrollo histórico basado en la experiencia. Ya hemos examinado esto con abundante detalle en los ejemplos de la aritmética y la geometría. Nos hemos convencido, en particular, de que las ideas de número o magnitud y de figura geométrica surgieron de esta manera y que reflejan las relaciones cuantitativas reales y las formas espaciales de la realidad. Las ideas fundamentales del análisis reflejan igualmente relaciones cuantitativas reales. Son construidas gradualmente, comenzando con generalizaciones de una gran cantidad de material concreto; así, el concepto de función es un reflejo, en forma abstracta, generalizada, de diversas relaciones entre cantidades reales.

Resumiendo todo esto, Engels llega a la conclusión fundamental: La matemática tiene como su objeto de estudio a la materia real, pero la considera en total abstracción de sus contenidos concretos y de sus peculiaridades cualitativas. En este sentido, es claro que la matemática debe distinguirse de las ciencias naturales y Engels hace claramente esta distinción.

La posibilidad de examinar abstractamente el objeto de estudio de la matemática se basa objetivamente en el mismo objeto de estudio. Sus formas, relaciones, interconexiones y leyes generales –independientemente de las peculiaridades específicas o de su contenido concreto– existen objetivamente, independientemente de nuestro conocimiento de ellas. Así, la existencia del número como una propiedad objetiva de las colecciones de objetos, la independencia de las relaciones numéricas respecto a las propiedades específicas de los objetos y la hicieron posible la aritmética. Donde tales formas y relaciones comunes, independientemente del contenido, no existen, ahí el examen matemático es imposible.

3. La ya mencionada característica fundamental de la matemática determina otras propiedades características. En la sección 2 examinamos algunos de estos rasgos especiales en el caso de la aritmética. Estos son: el "lenguaje formal" específico, la amplitud de aplicaciones, la abstracción de los resultados a partir de la experiencia, su inevitabilidad lógica y su persuasividad. El carácter teórico de la matemática es claramente un rasgo esencial de ella y ahora examinaremos este rasgo en detalle.

Si abstraemos, por ejemplo, la idea de número de su base concreta y consideramos números puros en general, independientemente de cualquier relación a una u otra colección concreta de objetos, entonces resulta de suyo que no podemos llevar a cabo experimentos sobre tales números abstractos. Permaneciendo a este nivel de abstracción sin regresar al objeto concreto, es posible obtener resultados sobre los números sólo median te argumentos basados en el concepto de número en sí mismo. Lo mismo se aplica, por supuesto, a todos los resultados matemáticos. Quedándonos dentro de los límites de la geometría pura, i. e., considerando figuras geométricas totalmente abstraídas de cualquier contenido concreto, cualitativo, podemos derivar nuevos resultados solamente razonando a partir del mero concepto de ésta o aquella figura a partir de los conceptos básicos de la geometría o de los propios axiomas. Así, las propiedades de un círculo se deducen de la idea de círculo como el lugar geométrico de los puntos equidistantes de un punto dado, y de ninguna manera, cada teorema es verificado por la experiencia.

Por tanto, el carácter abstracto de la matemática está predetermina do ya por el hecho de que los teoremas matemáticos son demostrados sólo mediante razonamientos basados en los conceptos mismos.

Es posible afirmar que en la matemática investigamos relaciones cuantitativas, teniendo en mente solamente lo que está contenido en las definiciones mismas. Correspondientemente, los resultados matemáticos se obtienen mediante argumentos derivados de las definiciones. Por supuesto, sería incorrecto interpretar esto demasiado literalmente y suponer que las definiciones suficientemente rigurosas de las ideas matemáticas fueron realmente formuladas antes de la creación de las teorías matemáticas correspondientes, de hecho, los conceptos mismos fueron precisados en el curso del desarrollo de la teoría y como resultado de este desarrollo. Un análisis profundo de la idea de número entero, tanto como una formulación precisa de los axiomas de la geometría no fueron llevados a cabo en la Antigüedad, sino hasta fines del siglo XIX. Sería aún más erróneo pensar que existe alguna clase de ideas, matemáticas absolutamente, precisamente determinadas. Todo concepto por más precisamente definido que parezca es, sin embargo, mutable, pues evoluciona y se hace más preciso con el desarrollo de la ciencia. Esto se demuestra plenamente por el desarrollo de la matemática en relación con todos sus conceptos, y sólo confirma una vez más la proposición fundamental de la dialéctica que en el mundo no hay nada inmutable y no sujeto a desarrollo. Así, con respecto a las ideas matemáticas, podemos hablar en primer lugar sólo de precisión suficiente pero no absoluta y, en segundo lugar, debemos tener en mente que la precisión y claridad de sus definiciones y la profundidad de su análisis evolucionaron con el desarrollo de la matemática. Sobre el tema del carácter cambiante de los conceptos matemáticos, tendremos más que decir en la siguiente sección, pero ahora, recordando las observaciones anteriores, consideramos en detalle la pertinencia de la precisión.

Esta precisión de los conceptos matemáticos junto con la aplicabilidad general de la lógica misma– parece ser la razón de la persuasividad interna y de la necesidad lógica características de los resultados matemáticos. La inevitabilidad de los resultados teóricos de la matemática da origen a la idea errónea de que la matemática tiene su fundamento en el pensamiento puro, de que es a priori y no se deriva de la experiencia, que no refleja la realidad. El famoso filósofo alemán Kant, por ejemplo, llegó a esta conclusión. Esta noción ideológica profundamente errónea surge en particular, cuando se considera a la matemática en su forma acabada y no en términos de su origen y desarrollo reales. Pero este enfoque es bastante estéril, por la simple razón de que no corresponde al estado real de las cosas, puesto que está firmemente establecido que la matemática no es a priori, sino que surge de la experiencia. De hecho, los orígenes reales de la geometría fueron escritos en la época de Eudemo de Rodas, a quien citamos en la sección 3.

No sólo los conceptos de la matemática, sino sus resultados y meto dos, reflejan la realidad. Este importante punto es establecido por Engels, quien escribe: "Tampoco la aparente derivación de las magnitudes matemáticas unas de otras prueba su origen a priori, sino sólo su conexión racional". Los resultados y pruebas matemáticas surgen como reflejos de relaciones reales que la gente investigó en su experiencia. La suma de números refleja la combinación real de varios objetos conjuntados en uno, las bien conocidas demostraciones sobre igualdad de triángulos en las cuales se habla de superposición, tienen su origen ciertamente en la operación de encimar realmente un objeto sobre otro; esto sucede constantemente en la comparación de sus tamaños. El cálculo de volúmenes por medio de la integración refleja de manera abstracta la posibilidad real de construir cuerpos a partir de finas capas, o de contarlos en tales capas. Demostraciones matemáticas más complicadas son resultado de un mayor desarrollo que se origina en este fundamento material .

4. La total abstracción de los objetos matemáticos de cualquier cosa concreta y el carácter teórico de los resultados matemáticos que se basan en ellas, tienen como consecuencia otro rasgo importante de la matemática: en la matemática investigamos no sólo las relaciones cuantitativas y las formas espaciales que se abstraen directamente de la realidad, sino también las relaciones y formas que son definidas dentro de la matemática sobre la base de conceptos y teorías previamente reunidos. Es justamente este rasgo de la matemática el que Engels considera cuando, refiriéndose al origen de los conceptos de puntos, rectas, cantidades constantes y variables, dice: "sólo al final de todo esto alcanzamos por primera vez a las propias y libres creaciones e imaginaciones del entendimiento, a saber, a las magnitudes imaginarias".

El hecho histórico es que los números imaginarios no fueron tomados de la realidad en el mismo sentido que, digamos, los enteros. Aparecieron originalmente dentro de la propia matemática, producto del necesario desarrollo del álgebra, como las raíces de las ecuaciones de la forma $x^2 = -a$ (donde $a > 0$). A pesar de que, gradualmente, las operaciones con ellos fueron realizadas bastante libremente, su significado real permaneció sin aclararse por largo tiempo, y esta es la razón de que adquirieran el nombre de "imaginarios". Posteriormente fue descubierta su interpretación geométrica y se encontraron numerosas aplicaciones importantes. Precisamente del mismo modo, la geometría de Lobachevsky se originó como un producto creativo del gran científico; él no vio su significado real y en consecuencia la llamó "geometría imaginaria". Sin embargo, no fue un libre juego del entendimiento, sino el resultado inevitable de los conceptos fundamentales de la geometría, y Lobachevsky la consideró como una posible teoría de las formas y relaciones espaciales. Por tanto, no es posible interpretar "las libres creaciones e imaginaciones" de las cuales habla Engels, como simples arbitrariedades del pensamiento. La libre creación en la ciencia: esta es una cristalización de la necesidad lógica, determinada por los conceptos y las posiciones iniciales tomadas de la experiencia.

En la fase más reciente del desarrollo de la matemática, cuyos inicios pueden localizarse precisamente en el momento de la construcción de la geometría de Lobachevsky y del significado preciso de los números imaginarios, aparecieron nuevos conceptos y teorías y continúan apareciendo; estos están basados en conceptos y teorías previamente construidos que no necesariamente se extraen directamente de la realidad. La matemática define e investiga las posibles formas de la realidad; ésta es una de las características decisivas en la fase reciente de su desarrollo.

La teoría del conocimiento del materialismo dialéctico suministra una comprensión correcta de esta característica. Lenin escribió: "El conocimiento es el reflejo de la naturaleza por el hombre. Pero éste no es un reflejo simple, inmediato, completo, sino el proceso de una serie de abstracciones, la formación y el desarrollo de conceptos, leyes, etc." (*Cuadernos filosóficos*, Buenos Aires, 1974, p 174). El materialismo metafísico también reconoce que el conocimiento, en particular el conocimiento matemático, es un reflejo de la naturaleza. Sin embargo, como observa Lenin, la debilidad del materialismo metafísico es su incapacidad para aplicar la dialéctica a la teoría del reflejo (*ib.*, p. 330). El materialismo metafísico no comprende la complejidad de este reflejo, no entiende que se mueve a través de una serie de abstracciones mediante la formación de nuevos conceptos, mediante la construcción de nuevas teorías sobre la base de conceptos y teorías previamente construidos, y por el examen no sólo de los datos de la experiencia sino de sus posibilidades. Esta transición de los datos a las posibilidades se manifiesta ya en la formación de conceptos tales como el de número entero arbitrario o el de recta infinita, ya que no existe dato alguno en la experiencia sobre números enteros arbitrariamente grandes o extensiones infinitas. Pero cuando cristaliza el concepto de número, la posibilidad de continuación infinita de la sucesión numérica se manifiesta a partir del concepto mismo y de la ley de formación de números sucesivos mediante la adición de la unidad. Del mismo modo, la extensión de un segmento rectilíneo revela la posibilidad de su extensión infinita, expresada en el segundo postulado de Euclides: "Toda recta puede extenderse infinitamente". El proceso subsecuente de abstracción conduce a los conceptos de la sucesión completa de los números naturales y de todas las rectas infinitas. En la fase más reciente del desarrollo de la matemática, la construcción de teorías ha sido cualitativamente nueva pasando por una sucesión de abstracciones y formaciones de conceptos. Pero volviendo sobre la trayectoria de estas abstracciones, vemos que la matemática no está, de ninguna manera, separada de la realidad. Lo que es nuevo, surge sobre la base del reflejo de la realidad, como resultado de la lógica misma del concepto y, particularmente, por medio del regreso a la realidad a través de las aplicaciones a problemas físicos y tecnológicos. Así sucedió con los números imaginarios. También es cierto en relación a otras teorías matemáticas, por más abstractas que puedan ser. Un ejemplo característico se encuentra en la teoría de los espacios n-dimensionales. Tales espacios fueron inventados como generalizaciones de la geometría euclidiana conjuntamente con el desarrollo del álgebra y el análisis, bajo la influencia de la mecánica y la física. La combinación de estas ideas llevó a Riemann a la construcción de la teoría general que, desarrollada ulteriormente por otros matemáticos, encontró una serie de aplicaciones importantes y, finalmente proporcionó un aparato matemático disponible para la construcción de Einstein de la teoría general de la relatividad (más precisamente, la teoría de la gravitación). No es accidental que las teorías geométricas abstractas encontraran brillantes aplicaciones, tampoco es resultado de una "armonía preestablecida de la naturaleza y la razón", más bien fue el resultado del hecho de que estas teorías surgieron de la geometría, que estaba basada directamente en la experiencia, y de que estaban relacionadas por sus creadores a problemas de investigación del espacio real. Riemann en particular, previo claramente la conexión de su teoría con la de la gravitación.

Así, en el desarrollo de la matemática, existe la ley del movimiento del conocimiento formulada por V. I. Lenin: "El pensamiento, que avanza de lo concreto a lo abstracto –siempre que sea correcto...– no se aleja de la verdad sino que se acerca a ella. La abstracción de la materia, de una ley de la naturaleza, la abstracción del valor, etc., en una palabra, todas las abstracciones científicas (correctas, serias, no absurdas) reflejan la naturaleza en forma más profunda, veraz y completa. De la percepción viva al pensamiento abstracto y de éste a la práctica: tal es el camino dialéctico del conocimiento de la verdad, del conocimiento de la realidad objetiva" (*ibid*, p. 163).

De lo que se ha dicho, resulta claro que la visión idealista –de que las teorías matemáticas constituyen meramente esquemas convencionales elegidos para describir los datos de la experiencia, o para "ordenar" el afluente de sensaciones sobre la base del "principio de la economía del pensamiento"– es completamente falsa.

Engels observa (como se remarcó anteriormente) que las proposiciones de la matemática, abstraídas del mundo real como si fueran opuestas a él, se aplican al estudio de éste como un esquema acabado. Por ejemplo, continuamente hacemos uso de los cálculos en la forma de números acabados (tabulados). Esto es más cierto aún en las teorías surgidas a niveles superiores de abstracción. En el ejemplo ya discutido, la geometría de Riemann sirvió como un esquema matemático ya listo para la teoría de la gravitación. Pero Engels explica que la posibilidad de tal aplicación de la matemática a la investigación del mundo real se basa en el hecho de que la matemática fue tomada de ese mundo, y no expresa más que una de las formas de conexión del mismo, sólo a causa de esto es que puede aplicarse. El hecho de que muchas teorías sean creadas dentro de la propia matemática no modifica nada de esto. El desarrollo de las aplicaciones de las teorías formales a la realidad no es, en modo alguno, un asunto de convención; este desarrollo aparece como una consecuencia lógica del objeto mismo. En cualquier caso, las teorías matemáticas reflejan la realidad; la única diferencia entre ellas es que en algunos casos el reflejo es más inmediato, mientras que en otros pasa por una serie de abstracciones, conceptualizaciones, etc.

5. La etapa más reciente en el desarrollo de la matemática se caracteriza no sólo por niveles mayores de abstracción; se caracteriza además por la esencial ampliación de su objeto de estudio, por ir más allá de los límites de los conceptos iniciales de relaciones cuantitativas y formas espaciales.

Las figuras en un espacio de varias dimensiones –o de dimensión infinita– no son, por supuesto, formas espaciales en el sentido usual en que las entendemos cuando tenemos en mente el espacio común real, en lugar de los espacios abstractos de la matemática. Tales espacios tienen significado real y reflejan de manera abstracta formas definidas de realidad semejante; por esta razón, en contraste con el espacio real común, podemos llamarlos "como-espacios". Al hablar de espacios de varias dimensiones, o de figuras en ellos, dotamos de un nuevo contenido al concepto de espacio, de manera que es necesario distinguir claramente entre el concepto abstracto y generalizado de espacio en la matemática, por un lado, y el concepto de espacio en su sentido original como la forma universal de existencia de la materia, por el otro.

El surgimiento, a fines del siglo pasado, de la nueva disciplina de la lógica matemática, desarrollada extensivamente desde entonces, servirá como otro ejemplo del modo en que el objeto de estudio de la matemática ha roto con las limitaciones de las formas espaciales y las relaciones cuantitativas en el sentido original de estos términos. El objeto de consideración de esta disciplina es la estructura de las demostraciones matemáticas, esto es, estudia cuáles proposiciones pueden derivarse de premisas dadas, mediante reglas prescritas. Investiga este tema, como es característico en la matemática, en completa abstracción del contenido, reemplazando así proposiciones por fórmulas y reglas de inferencia mediante los principios de operación con estas fórmulas. Las relaciones entre premisas y conclusiones, axiomas y teoremas, por supuesto, no se reducen a formas espaciales o a relaciones cuantitativas en el sentido usual de las relaciones entre valores numéricos.

Como otro ejemplo, consideramos la teoría de grupos, que puede entenderse como el estudio de las simetrías en el sentido más general. El cambio de las simetrías de un cristal, de azufre, digamos, al pasar de la forma romboidal a la prismática, es un cambio cualitativo fundamental del estado de la sustancia. En este sentido, la teoría de grupos es el estudio de las cantidades o cualidades definidas de un objeto, cambios en los cuales van acompañados cambios cualitativos en el objeto mismo.

Una consecuencia de la extensión del objeto de estudio de la matemática es la extensión sustancial de nuestro entendimiento de las relaciones cuantitativas y de las formas espaciales. ¿Cuáles son, entonces, los rasgos generales característicos de esta expansión en el objeto de estudio de la matemática?

Si respondemos a esta pregunta no enumerando, sino intentando aclarar los rasgos comunes de estos objetos en toda su diversidad de formas, entonces la respuesta se encuentra esencialmente en Engels. Es suficiente fijar la atención en su tratamiento no sólo del objeto de estudio de la matemática sino del modo en que la matemática trata su objeto de estudio: la abstracción completa de la forma y las relaciones de su contenido. Este carácter abstracto de la matemática nos suministra simultáneamente una definición de su contenido.

El objeto de estudio de la matemática consiste de aquellas formas y relaciones de la realidad que tienen objetivamente tan alto grado de indiferencia respecto al contenido, que pueden abstraerse completamente de éste y que pueden definirse en una manera general con tal claridad y precisión, preservando tal riqueza de relaciones, que suministran una base para el desarrollo puramente lógico de la teoría. Si llamamos a estas formas y relaciones cuantitativas en el sentido más general de la palabra, es posible decir brevemente que el objeto de estudio de la matemática consiste de las relaciones cuantitativas y las formas, vistas de manera exclusivamente abstracta.

La abstracción no es, en modo alguno privilegio exclusivo de la matemática. Otras ciencias, sin embargo, están primordialmente interesadas en el grado de conformidad de sus sistemas de abstracción con una colección de datos claramente definida; uno de sus problemas importantes es la tarea de investigar los límites de aplicabilidad del sistema teórico a la colección de datos y determinar cambios apropiados en el sistema abstracto. La matemática, por el contrario, mientras investiga las propiedades generales en total abstracción del dato específico, examina estos sistemas de abstracción mismos en su generalidad abstracta, fuera de las fronteras de su aplicabilidad a fenómenos particulares concretos. Se puede decir que para la matemática es característico lo absoluto de la abstracción.

Es precisamente la indicada indiferencia hacia el contenido de las formas investigadas en la matemática, lo que define las propiedades generales de la matemática: su carácter teórico, su necesidad lógica y la inmutabilidad aparente de sus resultados, la creación interna de sus nuevos conceptos y teorías; precisamente la indiferencia respecto al con tenido determina el carácter especial de la aplicabilidad de la matemática. Cuando podemos trasladar un problema práctico al lenguaje de la matemática, podemos, al mismo tiempo, "abstraernos" de las características secundarias del problema y, haciendo uso de fórmulas y teoremas generales, obtener resultados precisos. De este modo la abstracción de la matemática constituye su potencia; esta abstracción es una necesidad práctica.

6. Regresando ahora al juicio de Engels acerca de la matemática, podemos ver su profundidad y riqueza y la posibilidad de desarrollarlas aún más. Sin ser un matemático, pudo hacer un análisis tan profundo de esta ciencia no sólo por ser un pensador genial, sino principalmente porque podía hacer uso del materialismo dialéctico y porque era guiado por él en su explicación de la esencia de la matemática. Por tanto, no es de extrañar que nadie antes de Engels pudiera dar una solución tan profunda y correcta a este problema. Los grandes matemáticos eran incapaces de resolver el problema de este modo.

Fue exactamente de esta manera en que posteriormente Lenin dio un análisis del problema de la física que sobrepasó cualquier cosa hecha en esta área.

Esto demuestra nuevamente el conocimiento y la potencia suministrados por el materialismo dialéctico; demuestra que no es suficiente tener conocimiento de proposiciones particulares; no es suficiente ser un trabajador científico creativo - también es necesario poseer el método general correcto, dominar el materialismo dialéctico. Sin esto, los resultados de la ciencia parecerán un cúmulo informe o se presentarán de manera distorsionada; en lugar de un conocimiento verdadero de la ciencia se tendrá una representación falsa, metafísica e idealista de ella. Así, por ejemplo, muchos matemáticos que no poseen el materialismo dialéctico se encuentran completamente desorientados en las cuestiones generales concernientes a su ciencia o las abordan de manera completamente inadecuada[1].

En la época en que Engels escribió el Anti-Dühring, i.e., en 1876-1877, la geometría no-euclidiana y las geometrías del espacio de varias dimensiones empezaban a ganar aceptación entre los matemáticos, la teoría de grupos apenas había sido formulada, la teoría de conjuntos apenas había aparecido y la lógica matemática acababa de nacer. Es obvio, por tanto, que Engels no podía haber dado una discusión detallada de las propiedades características de las últimas etapas en el desarrollo de la matemática; sin embargo, podemos encontrar en sus opiniones indicaciones para entenderlas.

[1] Es interesante observar, por ejemplo, que los dos eminentes geómetras americanos, Veblen y Whitehead, intentan definir lo que es la geometría en su libro *Foundations of Differential Geometry* y concluyen que es imposible dar tal definición, a excepción, quizá, de la siguiente: "la geometría es lo que los geómetras digan que es".

LAS LEYES DEL DESARROLLO DE LA MATEMÁTICA
A. N. Kolmogorov

En conclusión, intentaremos describir brevemente las leyes generales del desarrollo de la matemática.

1. La matemática no es creación de una época histérica o de alguna persona, es el producto de una serie de épocas y del trabajo de muchas generaciones. Como vimos, sus primeras ideas y proposiciones surgieron en la más temprana Antigüedad y han sido ordenadas en un sistema coherente hace más de 2000 años. A pesar de las transformaciones de la matemática, sus ideas y resultados son preservados en la transición de una época a otra, por ejemplo, las leyes de la aritmética o el teorema de Pitágoras. Las nuevas teorías contienen a las anteriores extendiéndolas, completándolas y generalizándolas.

Al mismo tiempo, es claro, del breve esbozo del desarrollo de la matemática presentado arriba, que su desarrollo no es simplemente una acumulación de nuevas teorías, sino que incluye cambios cualitativos esenciales. Correspondientemente, el desarrollo de la matemática puede ser separado en una sucesión de períodos históricos con las transiciones entre ellos marcadas por cambios fundamentales en el objeto de estudio o estructura de esta ciencia.

La matemática incluye en su dominio todas las nuevas áreas de relaciones cuantitativas de la realidad. Al mismo tiempo, los objetos más importantes de la matemática han sido y son las formas espaciales y las relaciones cuantitativas en el sentido sencillo más directo, de estos términos, y la comprensión matemática de nuevas conexiones y relaciones inevitablemente surge sobre la base y en conexión con los sistemas previamente construidos de las representaciones científicas cuantitativas y espaciales.

Finalmente, la acumulación de resultados dentro de la matemática necesariamente conduce hacia el ascenso a nuevos niveles de abstracción y nuevas generalizaciones de conceptos, y de ahí a una profundización del análisis de los conceptos originales.

Así como un poderoso roble engrosa sus ramas añadiendo nuevas capas, produce nuevas, se extiende hacía arriba y profundiza sus raíces hacia abajo, del mismo modo, la matemática en su desarrollo añade nuevo material a sus áreas ya existentes, forma nuevas áreas a investigar, asciende hacia nuevos niveles de abstracción y profundiza sus propios fundamentos.

2. La matemática tiene como su objeto de estudio las formas y relaciones reales de la realidad, pero, como dijo Engels, para estudiar estas formas y relaciones en forma pura es necesario aislarlas completamente de su contenido y dejarlo de lado como irrelevante. Sin embargo, las formas y relaciones no existen separadas de su contenido; las formas y relaciones matemáticas no pueden ser absolutamente indiferentes al contenido. Consecuentemente la matemática, por su naturaleza, al aspirar a lograr tal separación, intenta lo imposible. Esta es la contradicción fundamental en el corazón de la matemática. Es la contradicción específica, en la matemática de las contradicciones en el conocimiento. El reflejo en el pensamiento de cualquier fenómeno, cualquier aspecto, cualquier cantidad de la realidad, la hace burda y la simplifica, arrancando la de sus conexiones generales en la naturaleza. Cuando la gente, al estudiar las propiedades del espacio, aseguraba que era euclidiano, realizaba un acto excepcionalmente importante de cognición, a pesar de que contenía un error: las propiedades reales del espacio se tomaban simplemente, esquemáticamente, haciendo abstracción de la materia. Pero sin ésta, simplemente no habría geometría, y sobre la base de esta abstracción (por deducción interna, así como por confrontación de los resultados matemáticos con nuevos datos de otras ciencias) se produjeron y fortalecieron nuevas teorías geométricas.

La superación constante y el reestablecimiento de tales contradicciones a nuevos niveles de conocimiento, cada vez aproximándose más de cerca a la realidad, constituye la esencia del desarrollo del conocimiento. Este concepto de desarrollo, por supuesto, asigna un contenido positivo al conocimiento, un elemento de verdad absoluta en él. El conocimiento avanza en línea ascendente, y no se considera carente de valor alguno por el hecho de que incorpore errores en su desarrollo.

La contradicción fundamental, que hemos indicado, conduce a otra. Vimos esto en el ejemplo de la oposición de lo discreto con lo continuo. (En la naturaleza no hay una separación absoluta entre ellos y su separación en la matemática se hizo necesaria, inevitablemente, la creación de ideas enteramente nuevas que reflejaban profundamente la realidad mientras que, al mismo tiempo, rebasaban imperfecciones internas en las teorías matemáticas existentes). Exactamente de esta manera las contradicciones entre lo finito y lo infinito, lo abstracto y lo concreto, la forma y el contenido, etc., aparecen en la matemática como manifestaciones de su contradicción fundamental definida más arriba. Pero el factor decisivo en sus manifestaciones es que, abstrayendo de lo concreto y uniendo sus ideas abstractas, la matemática se separa de la experiencia y de la práctica, pero al mismo tiempo, se prueba como ciencia (i.e., tiene un valor cognoscitivo significativo) sobre la base de que descansa en la práctica, sobre la base de que se prueba no como matemática pura, sino aplicada. Hablando por el momento en lenguaje hegeliano, la matemática pura continuamente se niega a sí misma como matemática pura, si no fuera así, no podría tener un significado científico, no podría desarrollarse, no podría remontar las dificultades que inevitablemente surgen en ella.

En su aspecto formal, las teorías matemáticas se apartan de su contenido real como tantos otros esquemas, para obtener resultados concretos. La matemática surge de esta manera como un medio para resolver problemas en las ciencias naturales y la tecnología, la importancia de la matemática pura en la época presente reside, principalmente, en el método mate mático. Y, así como todo método existe y se desarrolla no en términos de sí mismo sino por sus aplicaciones, en conexión al contenido real al cual es aplicado, la matemática no puede existir y desarrollarse sin aplicaciones. Aquí también se revela la unidad en la contradicción: el método general aparece en oposición al problema concreto, como un medio para su solución, pero en sí mismo surge de la generalización del material concreto y existe por sí mismo, se desarrolla y encuentra justificación solamente en la solución de problemas concretos.

3. La práctica social tiene un papel determinante en el desarrollo de la matemática en tres aspectos: Plantea nuevos problemas a la matemática, estimula su desarrollo en direcciones particulares y proporciona criterios para la validez de sus resultados.

Esto puede verse con extraordinaria claridad en el ejemplo del origen del análisis. En primer lugar, fue el desarrollo de la mecánica y la tecnología lo que empujó hacia adelante el problema del estudio de la dependencia de cantidades variables en la forma más general. Arquímedes llegó justo al borde del cálculo diferencial e integral, pero permaneció, no obstante, en el marco de los problemas estáticos, mientras que en los tiempos modernos fue precisamente la investigación del movimiento, lo que produjo los conceptos de variable y función e hizo necesaria la formalización del análisis. Newton no podría haber desarrollado la mecánica sin desarrollar los métodos matemáticos correspondientes.

En segundo lugar, fueron precisamente las necesidades sociales de la producción las que rápidamente plantearon o resolvieron todos estos problemas. Este estímulo no estaba aún presente en la sociedad antigua ni en la medieval. Finalmente, es muy característico del análisis matemático, en sus comienzos, el haber encontrado pruebas de sus resultados primordialmente en su aplicación. Sólo por esta razón pudo desarrollarse, sin definiciones rigurosas de las ideas fundamentales (variable, función, límite) las que no se dieron sino hasta después. La validez del análisis fue establecida por sus aplicaciones a la mecánica, la física y la tecnología.

Lo que hemos dicho se aplica a todos los períodos del desarrollo de la matemática. Empezando en el siglo XVII, la mecánica, la física teórica y los problemas de la nueva tecnología, ejercieron una influencia especialmente directa sobre su desarrollo. La mecánica de los medios continuos, y después la teoría de los campos (termodinámica, electricidad, magnetismo, campos gravitacionales) condujeron al desarrollo de la teoría de las ecuaciones diferenciales parciales. El establecimiento de la teoría molecular y de la física estadística en general, que empezó al final del siglo pasado, sirvió como un importante estímulo para el desarrollo de la teoría de la probabilidad, en particular de la teoría de procesos aleatorios. A través de sus métodos analíticos y generalizaciones, la teoría de la relatividad jugó un papel decisivo en el desarrollo de la geometría riemanniana.

En nuestra época, el desarrollo de nuevas teorías matemáticas tales como el análisis funcional y otras, es estimulado por problemas de la me canica cuántica, problemas computacionales de tecnología, y tantos otros. La física y la tecnología no sólo plantean nuevos problemas para la matemática y la dirigen hacia nuevas áreas de investigación, sino que también proporcionan estímulos renovados para el desarrollo de áreas de la matemática, tales como la geometría riemanniana. Brevemente, el desarrollo intensivo de la ciencia requiere no sólo que proceda a atacar nuevos problemas sino también que la necesidad de su solución sea dictada por las necesidades del desarrollo de la sociedad. Muchas teorías matemáticas han surgido en tiempos recientes, pero sólo se desarrollaron y recibieron un lugar permanente en la ciencia aquellas que encontraron aplicaciones en las ciencias naturales y la tecnología, o las que jugaron un papel importante en las generalizaciones de las teorías que tienen tales aplicaciones. Más aún, aquellas teorías que no encontraron aplicaciones esenciales, por ejemplo, ciertos refinamientos de las teorías geométricas (no-desargueanas y no-arquimedianas) no se han desarrollado más.

La verdad de los resultados matemáticos no está basada, a fin de cuentas, en sus definiciones y axiomas, ni en el rigor formal de sus demostraciones, sino en sus aplicaciones reales, i.e., en última instancia, en la práctica.

Es necesario entender, por encima de cualquier cosa, que el desarrollo de la matemática es el resultado de la interacción de la lógica del objeto de estudio (reflejada en la lógica interna de la misma matemática) con la influencia de las necesidades de la producción y los lazos con las ciencias naturales. Este desarrollo avanza por caminos complejos a través de la lucha de contrarios e incluye cambios esenciales en el contenido básico y la forma de la matemática. En cuanto al contenido, el desarrollo de la matemática está determinado por su objeto de estudio, pero es impulsado básicamente, y en última instancia, por las necesidades de la producción. Tal es la ley básica del desarrollo de la matemática.

Para estar seguros no debemos olvidar que esta descripción se aplica solamente a las leyes básicas y que la relación de la matemática con la producción, hablando en términos generales, es compleja. De lo que hemos dicho más arriba, sería claramente ingenuo intentar basar directamente la aparición de cualquier teoría matemática en las "necesidades de la producción". Y más que eso, la matemática, como toda ciencia, posee una independencia relativa, su propia lógica interna, que refleja, como hemos enfatizado, una lógica objetiva, i. e., una conformidad con las leyes del objeto de estudio.

4. La matemática siempre ha estado influenciada no solo por la producción social, sino por el conjunto de las condiciones sociales. Su espléndido progreso en la época del triunfo de la Grecia clásica, el éxito del álgebra en Italia durante la era del Renacimiento, el desarrollo del análisis en el período posterior a la Revolución Inglesa, el progreso de la matemática en Francia en el período de la Revolución Francesa todo esto demuestra convincentemente la continua conexión entre el progreso matemático y el progreso general de la sociedad en lo técnico, lo cultural y lo político.

Este patrón también se exhibe claramente en el desarrollo de la matemática en Rusia. Es imposible separar el establecimiento de una escuela matemática rusa independiente, empezando con Lobachevsky, Ostrogradsky y Chebyshev, del progreso de la sociedad rusa en su conjunto. La época de Lobachevsky es la época de Puschkin y Glinka, la época de los decembristas, y el florecimiento de la matemática fue un elemento del progreso general.

Aún más persuasiva es la influencia del desarrollo social en el período posterior a la Gran Revolución Socialista de Octubre, cuando aparecieron, una tras otra, investigaciones de importancia fundamental con impactante rapidez, en muchas áreas: en teoría de conjuntos, topología, teoría de números, teoría de probabilidad, teoría de ecuaciones diferenciales, análisis funcional, álgebra y geometría.

Finalmente, la matemática siempre ha experimentado, y aún experimenta, una marcada influencia de la ideología. Como en toda ciencia, el contenido objetivo de la matemática se percibe e interpreta por los matemáticos y filósofos en el marco de tal o cual ideología.

En resumen, el contenido objetivo de una ciencia siempre se presenta bajo una u otra forma ideológica; la unidad y lucha de esta oposición dialéctica -contenido objetivo y forma ideológica- juega, en el desarrollo de la matemática, como en toda ciencia un papel que de alguna manera es despreciable.

La lucha entre el materialismo (que corresponde a los contenidos objetivos de la ciencia) y el idealismo (que discrepa con aquellos contenidos y distorsiona sus ideas) se manifiesta en la historia entera de la matemática. La lucha es claramente evidente en la antigua Grecia, donde el idealismo de Pitágoras, Sócrates y Platón se proyecta contra el materialismo de Tales, Demócrito y los otros filósofos que crearon la matemática griega. Con el desarrollo del esclavismo, los estratos superiores de la sociedad dejaron de tomar parte en la producción, considerando que ese era el destino de las clases inferiores, y esto generó la separación entre la ciencia "pura" y la práctica. Sólo la geometría teórica pura resultaba de valor para el filósofo verdadero. Característicamente, la investigación de ciertas curvas obtenidas por medios mecánicos, y aún la investigación de las secciones cónicas, eran consideradas por Platón fuera de los límites de la geometría, ya que "no nos ponen en contacto con las ideas eternas e incorpóreas" sino que "son usadas como herramientas en oficios bajos y vulgares".

Un claro ejemplo de la lucha del materialismo contra el idealismo en la matemática nos lo proporciona la actividad de Lobachevsky, quien avanzó en y defendió una visión materialista de la matemática. Contra la visión idealista de los kantianos.

La escuela matemática rusa se caracteriza por una tradición materia lista. Así Chebyshev enfatizó claramente la importancia decisiva de la práctica, y Lyapunov expresó el enfoque de la escuela matemática rusa en las notables palabras que siguen: "El camino más o menos general de la teoría es la investigación detallada de asuntos que sean de particular importancia desde el punto de vista de las aplicaciones y, al mismo tiempo, presenten dificultades teóricas especiales que demandan la investigación de nuevos métodos y la construcción de nuevos principios científicos, y la subsecuente generalización de estos resultados y construcciones, por medio de una teoría más o menos general". Generalización y abstracción no en sí mismas, sino en relación a materiales concretos; los teoremas y teorías no en sí mismos sino en relación general con la ciencia, conducen, en última instancia, a la práctica -esto de hecho se muestra como lo importante y recompensante en la empresa en su conjunto.[2] Tales fueron las aspiraciones de Gauss y Riemann y otros grandes eruditos.

Sin embargo, con el desarrollo del capitalismo en Europa, los puntos de vista ideológicos empezaron a transformar el punto de vista idealista que había reflejado la ideología dominante en la época de expansión de la burguesía, desde el siglo XVI hasta los comienzos del XIX. Así, por ejemplo, Cantor (1846-1918), al crear la teoría de los conjuntos infinitos, apelaba directamente a Dios, declarando en este sentido que los conjuntos infinitos tenían existencia absoluta en el intelecto divino. Poincaré, el sobresaliente matemático francés de fines del siglo XIX y comienzos del XX, insinuó la noción idealista de "convencionalismo", de acuerdo a la cual la matemática consiste en un esquema acordado convencionalmente, tomado por conveniencia como la descripción de una experiencia multifacética. Así, en opinión de Poincaré, los axiomas de la geometría euclidiana no son más que convenciones acordadas, con significado por su claridad, conveniencia y simplicidad, pero no conforme a la realidad. Por esta razón, Poincaré dijo, la física, por ejemplo, abandonaría más pronto la ley de la propagación rectilínea de la luz que la geometría euclidiana. Este punto de vista fue refutado por el desarrollo de la teoría de la relatividad que, a pesar de toda la "simplicidad" y "conveniencia" de la geometría euclidiana, condujo al resultado, en completa armonía con las ideas materialistas de Lobachevsky y Riemann, consistente en que la geometría real del espacio no es euclidiana.

A principios del siglo XIX apareció entre los matemáticos una diversidad de tendencias, como resultado de las dificultades aparecidas en la teoría de conjuntos y en conexión con la necesidad de un análisis de los conceptos fundamentales de la matemática. Se perdió el consenso en torno a cómo debía entenderse el contenido de la matemática; distintos mate máticos llegaron a ver no sólo los fundamentos generales de la ciencia de diferente manera, como previamente había sido el caso; sino que llega ron a diferentes evaluaciones sobre el significado e importancia de los resultados y argumentos concretos particulares. Deducciones que fueron consideradas de gran significado e interés por un matemático, fueron declaradas por otros carentes de significado e importancia. Surgieron las corrientes idealistas de "logicismo", "intuicionismo", "formalismo", etc.

El logicismo afirma que la matemática en su conjunto es una consecuencia de las ideas de la lógica. El intuicionismo ve en la intuición la fuente de la matemática y considera que sólo lo que es aprehendido intuitivamente es significativo. En particular, por tanto, niega completamente la importancia de la teoría de Cantor de conjuntos infinitos. Más que eso, los intuicionistas niegan el simple significado de afirmaciones tales como el teorema de que cualquier ecuación algebraica de grado n tiene n raíces. Para ellos esta afirmación es vacía dado que no está indicado el método para calcular estas raíces. Así, el completo rechazo del significado objetivo de la matemática conduce a los intuicionistas a denigrar como "carente de significado" una parte importante de la matemática.

El matemático más prominente de principios de nuestro siglo, David Hilbert, se dio a la tarea de salvar a la matemática de ataques de este tipo. La esencia de su idea fue intentar reducir las teorías matemáticas a operaciones puramente formales de símbolos, de acuerdo a reglas establecidas previamente. La argumentación era que, en un enfoque puramente formal, todas las dificultades serían eliminadas, dado que la matemática se convertiría en símbolos y en reglas de operación que actúan sobre ellos, sin referencia alguna a su significado. Este es entonces, el propósito del formalismo en la matemática. De acuerdo con el intuicionista Brouwer la verdad de la matemática para los formalistas existe en el papel, mientras que

[2] Un entendimiento general de la conexión necesaria de las diferentes áreas de la matemática entre sí, y de éstas con las ciencias naturales y la práctica, tiene una enorme importancia no sólo para tener una visión correcta de la matemática, sino, también, para orientar al investigador en la selección de la dirección y el tema de investigación.

para un intuicionista está en la cabeza de los matemáticos.

No es difícil, sin embargo, ver que ambos están en un error, ya que la matemática, además de que está escrita en el papel y del hecho de que es pensada por los matemáticos, refleja la realidad, y la verdad de la matemática incluye en sí misma, la correspondencia con la realidad objetiva. Al separar la matemática de la realidad material todas estas tendencias se convierten en idealistas.

La idea de Hilbert fue refutada como resultado de su propio desarrollo. El matemático austriaco Gödel mostró que es imposible formalizar completamente aún la aritmética, como Hilbert lo había creído. El resultado de Gödel reveló claramente la dialéctica interna de la matemática, dialéctica que no nos permite llegar por exhaución a un área mediante un cálculo formal. Aún el infinito más simple, aquel de la sucesión de números naturales se mostró como un esquema finito inagotable de símbolos y sus reglas de operación. Así fue probado lo que Engels ya había expresado en forma general cuando escribió: "el infinito es una contradicción... la eliminación de la contradicción sería el fin del infinito" (*Anti-Dühring*). Hilbert contaba con que era posible contener al infinito matemático dentro del marco de referencia de un esquema finito resolviendo así todas las contradicciones y dificultades. Esto resultó no ser posible.

Bajo las condiciones del capitalismo, no obstante, el convencionalismo, el intuicionismo, el formalismo y corrientes similares, no sólo persisten, sino que se alimentan con nuevas variaciones de puntos de vista idealistas de la matemática. Las teorías relacionadas con el análisis lógico de los fundamentos de la matemática son esencialmente usadas en nuevas variantes de idealismo subjetivo. Hoy día, el idealismo subjetivo usa de la matemática, especialmente de la lógica matemática, así como de la física. Por esta razón, las cuestiones del entendimiento de sus fundamentos, adquieren particular agudeza.

Así, las dificultades del desarrollo de la matemática bajo las condiciones del capitalismo producen una crisis ideológica en esta ciencia similar a la crisis en la física cuya naturaleza fue explicada por Lenin en su brillante trabajo *Materialismo y empiriocriticismo*. La crisis en absoluto significa que la matemática en los países capitalistas esté completamente sujeta en su desarrollo. Muchos eruditos que han asumido posiciones claramente idealistas, son responsables de importantes y a veces notables éxitos en la solución de problemas matemáticos concretos y en el desarrollo de nuevas teorías matemáticas. Es suficiente referirse al brillante desarrollo de la lógica matemática.

El defecto radical de los puntos de vista matemáticos propagados en los países capitalistas reside en su idealismo y su metafísica; separar la matemática de la realidad y olvidar su desarrollo real. El logicismo, el intuicionismo, el formalismo y otras corrientes similares particularizan uno u otro aspecto de la matemática -su relación con la lógica, su claridad intuitiva, su rigor formal, etc.- exagerando y absolutizando sin fundamento su significado, sacando a la matemática fuera de la realidad y perdiendo la perspectiva de ella como un todo tras un profundo análisis de un aspecto particular de la matemática. Como resultado de tal unilateralidad, ninguna de estas corrientes, a pesar de todo el ingenio y profundidad de todos sus resultados particulares, pueden brindarnos un verdadero entendimiento de la matemática. En contras te con las diversas tendencias y matices del idealismo y la metafísica, el materialismo dialéctico considera a la matemática en su conjunto, y por tanto, como realmente es, en toda la riqueza y complejidad de sus conexiones y desarrollo. Y particularmente porque el materialismo dialéctico se esfuerza por entender las conexiones entre la ciencia y la realidad en toda su riqueza y complejidad, la complejidad total del desarrollo, desde las generalizaciones simples de la experiencia hasta la abstracción elevada y de ella a la práctica, precisamente porque en su mismo enfoque de la ciencia él permanece en constante correspondencia con su contenido objetivo y sus nuevos descubrimientos, de ahí, y en última instancia, solamente por esto, es la única filosofía científica auténtica que conduce al entendimiento correcto de la ciencia en general y de la matemática en particular.