me libre! Lo que trato de hacer es poneros delante, en una forma tan comprensible como pueda, la información que necesitáis para hacer vuestros propios juicios acerca de los logros presentes y los futuros potenciales del caos. He tratado de que quede bien claro en qué momentos estoy especulando. El resto del tiempo estoy presentando ideas y resultados que han sido publicados en la literatura matemática y científica seria. Esto no significa que sean necesariamente correctos, sino que son respetables...

Ahora soy terriblemente consciente de la razón por la que la gente no lee prefacios: ellos pasan, ¿o no es así? Y yo no os he hablado de todas las nuevas aplicaciones del caos que he tenido que dejar fuera por falta de espacio: caos en el interior fundido de la Tierra, en las auroras boreales, en la estructura profunda del espacio-tiempo, en las colonias de hormigas, en la teoría de codificación y comunicación, en las voces de los cantantes de ópera...

Creo que lo voy a dejar.

IAN STEWART

Prólogo
¿Mecanismo de relojería o caos?

> Usted cree en un Dios que juega a los dados, y yo en la ley y el orden absolutos.
>
> ALBERT EINSTEIN, carta a MAX BORN

Existe la teoría de que la historia se mueve en ciclos. Pero cuando, al igual que una escalera de caracol, el curso de los acontecimientos humanos completa un círculo lo hace en un nuevo nivel. La «oscilación pendular» de los cambios culturales no repite simplemente los mismos acontecimientos una y otra vez. Tanto si la teoría es cierta como si no, nos sirve de metáfora para concentrar nuestra atención. El tema de este libro constituye uno de esos ciclos espirales: el caos es reemplazado por el orden, que a su vez da lugar a nuevas formas de caos. Pero en esta oscilación del péndulo no intentamos destruir el caos, sino domesticarlo.

En el pasado lejano de nuestra raza, la naturaleza era considerada una criatura caprichosa y la ausencia de pautas en el mundo material se atribuía a los caprichos de los poderosos e incomprensibles dioses que lo gobernaban. El caos reinaba y la ley era inimaginable.

A lo largo de un período de varios miles de años, la humanidad fue comprendiendo lentamente que la naturaleza posee muchas regularidades, que pueden ser registradas, analizadas, predichas y explotadas. En el siglo XVIII, la ciencia había tenido tal éxito en el descubrimiento de las leyes de la naturaleza que muchos pensaron que quedaba poco por desvelar. Leyes inmutables determinaban el movimiento de cada partícula del universo, de forma exacta y para siempre: la tarea del científico consistía en dilucidar las implicaciones de dichas leyes para cualquier fenómeno concreto de interés. El caos había sido sustituido por un mundo hecho de engranajes mecánicos.

Pero el mundo continuó girando, y nuestra visión del universo se movió con él. Hoy en día ni siquiera nuestros relojes están hechos con engranajes mecánicos; así, ¿por qué tendría el mundo que estar constituido por ellos? Con el advenimiento de la mecánica cuántica, el mundo mecánico se ha convertido en una lotería cósmica. Los sucesos fundamentales, tales como el decaimiento de un átomo radiactivo, tienen lugar por probabilidad, no según una ley. A pesar del éxito espectacular de la mecánica cuántica, sus características probabilísticas no han resultado atractivas para todo el mundo. Al principio del capítulo se reseña la famosa objeción de Einstein en una carta a Max Born. Einstein se refería a la mecánica cuántica, pero su filosofía reflejaba, al mismo tiempo, la actitud hacia la mecánica clásica de varias generaciones, para las que la indeterminación cuántica era inoperativa. La metáfora de los dados se aplica a todo proceso aleatorio. ¿Deja el determinismo cabida al azar?

Si Einstein estaba equivocado o no respecto de la mecánica cuántica aún está por dilucidar. Pero lo que sí sabemos es que el mundo de la mecánica clásica es más misterioso de lo que incluso Einstein imaginó. La distinción misma que él trató de subrayar, entre la aleatoriedad del azar y el determinismo de la ley, se pone en duda. Quiza Dios puede jugar a los dados y crear, al mismo tiempo, un universo con un orden y una ley absolutos.

El ciclo ha dado una vuelta completa, pero a un nivel superior. Estamos empezando a descubrir que sistemas que obedecen leyes inmutables y precisas no siempre actúan de manera predecible y regular. Leyes deterministas pueden producir comportamientos que parecen aleatorios. El orden puede engendrar su propio tipo de caos. La cuestión no es ya si Dios juega o no a los dados, sino *cómo* juega Dios a los dados.

Se trata de un descubrimiento espectacular cuyas implicaciones aún no han producido todo su impacto en nuestro pensamiento científico. Los conceptos de predicción o de repetibilidad de un experimento adquieren nuevos aspectos cuando se analizan desde la óptica del caos. Lo que creíamos que era simple se convierte en complicado, y surgen nuevas y perturbadoras cuestiones relativas a la medida, la predictibilidad y la verificación o refutación de las teorías.

En contrapartida, lo que se creía que era complicado puede volverse sencillo. Fenómenos que parecen faltos de una estructura y aleatorios pueden, de hecho, obedecer leyes simples. El caos determinista posee sus propias leyes e inspira nuevas técnicas experimentales. Las irregularidades son abundantes en la naturaleza y algunas de ellas podrían ser manifestaciones físicas de la matemática del caos. Así, el flujo turbulento de un fluido, las inversiones del campo magnético terrestre, las irregularidades de los latidos del corazón, las formas de convección del helio líquido, los giros desordenados de cuerpos celestes, las franjas vacías en el anillo de asteroides, el crecimiento de las poblaciones de insectos, el goteo de un grifo, la evolución de una reacción química, el metabolismo de las células, los cambios meteorológicos, la propagación de los impulsos nerviosos, las oscilaciones de los circuitos electrónicos, el movimiento de un barco amarrado a una boya, el rebote de una bola de billar, las colisiones de los átomos de un gas y la incertidumbre subyacente de la mecánica cuántica son algunos de los problemas a los que se ha aplicado la matemática del caos.

Se trata de un nuevo mundo, un nuevo tipo de matemática, un descubrimiento fundamental en la comprensión de las irregularidades de la naturaleza. Estamos siendo testigos de su nacimiento.

Su futuro aún se tiene que revelar.

1

Caos a partir del orden

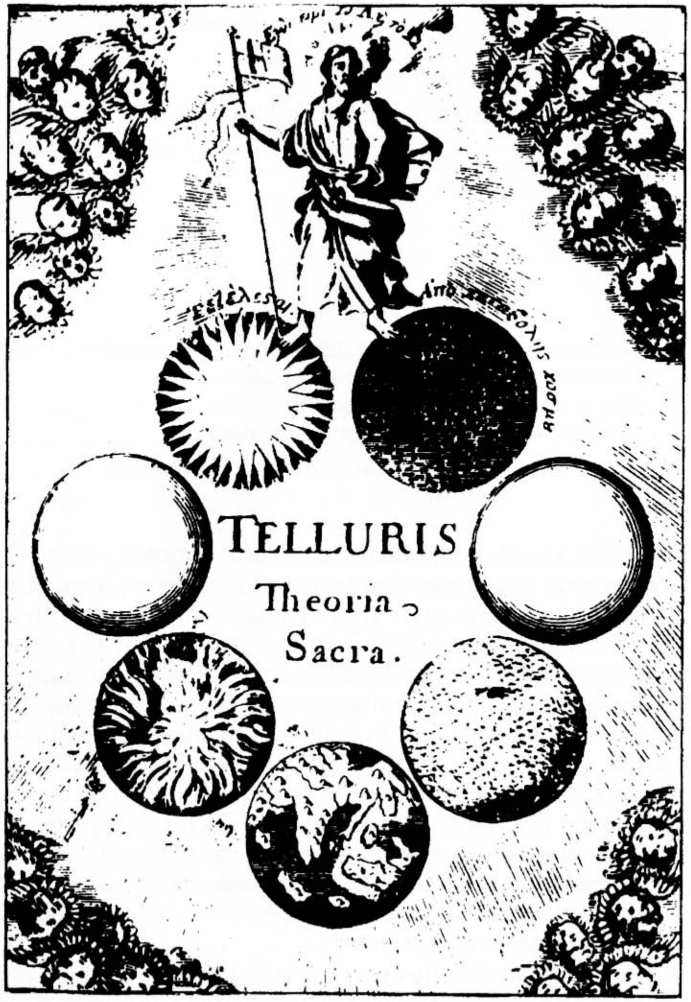
¡He aquí tu imperio de terror! ¡El caos ha sido restaurado!
La luz se apaga ante su destructora palabra;
Que tu mano, gran Anarco, haga caer el telón,
y la oscuridad universal nos entierre a todos.*

ALEXANDER POPE, *The Dunciad*

La batalla eterna entre orden y desorden, armonía y caos, debe representar una percepción humana del universo hondamente sentida, pues es común a una gran cantidad de mitos y de culturas. En la cosmología de la antigua Grecia, el caos era a la vez el vacío primitivo del universo y el submundo en donde habitaba la muerte. En la teología del Antiguo Testamento «la Tierra era un caos informe; sobre la faz del abismo, la tiniebla». En una épica babilónica temprana, el universo surge del caos que sobrevino cuando una ingobernable familia de dioses de los abismos fue destruida por su propio padre. El caos es la masa original sin forma a partir de la cual el creador moldeó el universo ordenado (figura 1). El orden es considerado equivalente al bien y el desorden al mal. El orden y el caos son considerados como dos polos opuestos, sobre los que gira nuestra interpretación del mundo.

Ciertos impulsos innatos hacen que la humanidad se esfuerce por comprender las regularidades de la naturaleza, por encontrar las leyes ocultas tras las inexplicables complejidades del universo, por

* [Lo! thy dread empire, Chaos! is restor'd; / Light dies before thy uncreating word; / Thy hand, great Anarch! lets the curtain fall, / And universal darkness buries all.]



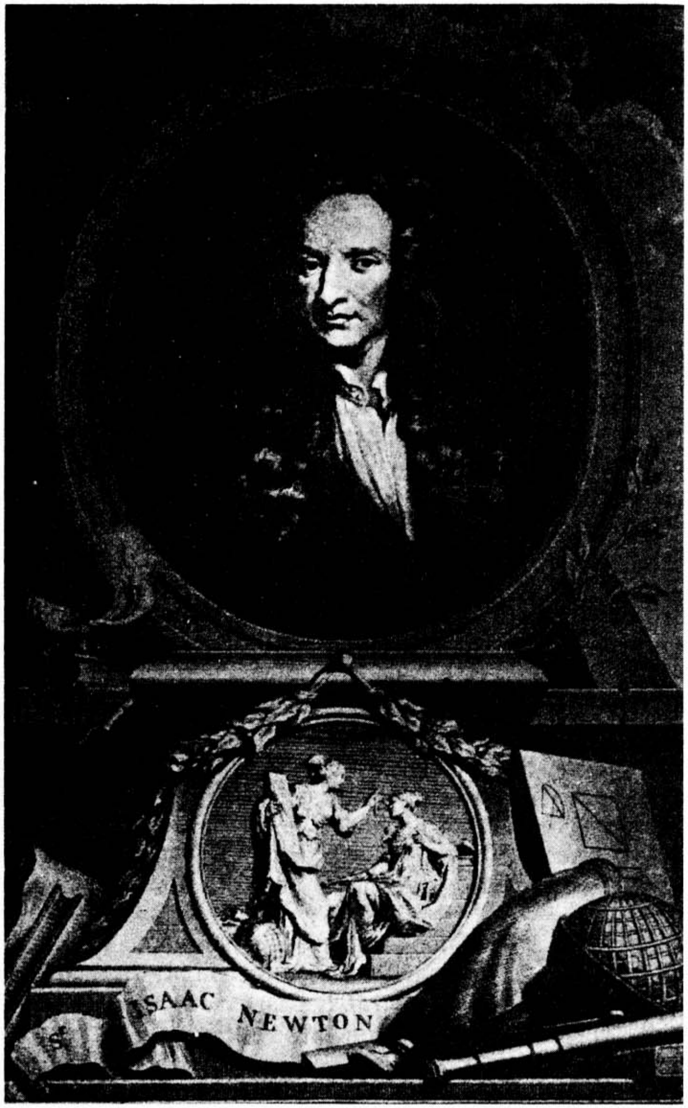
1. Historia de la Tierra (en el sentido de las agujas del reloj, desde arriba a la derecha); el líquido caótico, la Tierra prístina, la Tierra durante el diluvio, la Tierra moderna, la Tierra en el estallido futuro, la Tierra durante el Milenio y el destino último de la Tierra como una estrella (extraído de Thomas Burnet, *Telluris theoria sacra*, 1681).

extraer el orden a partir del caos. Incluso las civilizaciones más tempranas poseían sofisticados calendarios para predecir las estaciones y reglas astronómicas para predecir los eclipses; adivinaban figuras, y urdían leyendas sobre ellas, en las estrellas del cielo. Inventaban genealogías de dioses para explicar las extravagancias de un mundo, por lo demás, aleatorio y sin sentido. Ciclos, formas, números. Matemática.

Un razonamiento poco razonable

El físico Eugene Wigner escribió sobre la «irrazonable efectividad de la matemática» al describir la estructura del mundo físico. La matemática surge a partir de cuestiones acerca del mundo físico y justifica su paga proporcionando algunas de las respuestas. Pero raramente se trata de un proceso directo. Con frecuencia, una idea matemática debe emprender su propia vida, existiendo como si estuviera en el limbo, siendo desarrollada y discutida de por sí como un objeto matemático puro, hasta que sus más profundos secretos son extraídos y su significado físico es percibido. Quiza la matemática es efectiva porque representa el lenguaje subyacente del cerebro humano. Quiza las únicas pautas que somos capaces de percibir son matemáticas, porque la matemática es el instrumento de nuestra percepción. Quiza la matemática es efectiva para la organización de la existencia física porque está inspirada en la existencia física. Quiza su éxito es una ilusión cósmica. Quiza no existen verdaderas pautas, sino sólo aquellas que nosotros, pobres imbéciles, imponemos. Todas estas preguntas son para los filósofos. La realidad práctica es que la matemática constituye el método más efectivo y fiable de que disponemos para el entendimiento de nuestro alrededor.

Han transcurrido ahora algo más de trescientos años desde la publicación de una obra sin igual en la historia: los *Principios matemáticos de la filosofía natural*, de Isaac Newton (figura 2). Todavía se venden unos 700 ejemplares del libro al año, principalmente a estudiantes de carreras de humanidades que estudian a los grandes maestros a partir de las fuentes originales. Su longevidad es sorprendente, si bien ya no es un *best-seller*. En cambio su



2. Isaac Newton (grabado basado en una pintura de Godfrey Kneller).

mensaje ha sido absorbido en los fundamentos mismos de nuestra cultura.

El mensaje es: *la Naturaleza posee unas leyes y nosotros podemos encontrarlas.*

La ley de Newton de la gravedad es muy simple. Todas las partículas materiales del universo se atraen entre sí, dos a dos, con una fuerza que depende de una manera precisa y simple de sus masas y de las distancias entre ellas. (Es proporcional al producto de las dos masas, dividido por el cuadrado de la distancia que las separa.) La ley se puede condensar en una breve fórmula algebraica. Usada en conjunción con otra ley de Newton, la ley del movimiento (la aceleración de un cuerpo es proporcional a la fuerza que actúa sobre él), explica una inmensa cantidad de observaciones astronómicas, que van desde las trayectorias de los planetas a través del Zodiaco hasta las oscilaciones de la Luna sobre su eje, desde el acoplamiento resonante de los satélites de Júpiter hasta las curvas luminosas de las estrellas binarias, y desde las zonas vacías de los anillos de Saturno hasta el nacimiento de las galaxias.

Simple. Elegante. Evasivo.

El orden a partir del caos.

Newton era un hombre ambicioso. Buscó ni más ni menos que «el sistema del mundo». La Teoría del Todo.

En términos relativos a su época tuvo un éxito mayor de lo que incluso podía haber soñado. Durante más de dos siglos las leyes de Newton reinaron como la descripción suprema y definitiva de la naturaleza. Únicamente en los dominios microscópicos del átomo y en las vastas extensiones del espacio interestelar aparecieron discrepancias entre la naturaleza según Newton y la naturaleza según ella misma. En dichos dominios Newton ha sido desplazado por la mecánica cuántica y por la relatividad. Los físicos actuales, buscando una vez más el santo grial de una Teoría del Todo, hablan de la supergravedad y de las supercuerdas, de los *quarks* y de la cromodinámica, de las rupturas de simetría y de las Teorías de Gran Unificación. Vivimos en un mundo de veintiséis dimensiones (o quiza simplemente diez), las cuales, excepto cuatro de ellas, están extremadamente enrolladas, como un aterrorizado armadillo, y sólo pueden ser detectadas a través de sus temblores. ¿Una moda pasajera o una visión del futuro? Aún no lo podemos asegurar. Pero conforme una teoría suplanta a otra, y un paradigma destrona a otro paradigma, una cosa permanece constante: la aplicabilidad de la matemática. Las leyes de la naturaleza son matemáticas. Dios es un geómetra.

Un mundo mecánico

La revolución del pensamiento científico que culminó con Newton nos llevó a una visión del universo como un engranaje gigantesco, que funcionaba como un mecanismo de relojería, una frase que todavía se usa —a pesar de ser inapropiada en una época de relojes digitales— para expresar la fiabilidad y la precisión mecánicas absolutas. De acuerdo con esta visión, una máquina es, por encima de todo, predecible. Bajo las mismas condiciones realizará las mismas cosas. Un ingeniero que sepa las especificaciones de la máquina y su estado en un momento dado puede, en principio, calcular exactamente lo que hará en cualquier instante posterior. Dejemos de lado por el momento, una vez mencionada aunque no elaborada, la cuestión de qué es posible en la *práctica* en vez de en principio, y pasemos a entender primero por qué los científicos de los siglos XVII y XVIII se vieron abocados hacia lo que a primera vista parece una visión tan árida y estéril de este universo de milagros y sorpresas.

Newton formuló sus leyes en forma de ecuaciones matemáticas que no sólo relacionaban entre sí cantidades, sino también las velocidades de cambio de dichas cantidades. Cuando un cuerpo cae libremente bajo una gravedad constante, no es su posición la magnitud que permanece constante; si así fuera, permanecería suspendido sin soporte alguno. Tampoco es la velocidad —el ritmo de cambio de la posición— la magnitud que permanece constante. Cuanto más cae un cuerpo, más rápido lo hace: por eso es más peligroso caerse desde un edificio alto que desde uno bajo. Es la aceleración *—el ritmo de cambio del ritmo de cambio de la posición—* la que es constante. Quiza podamos comprender ahora por qué se necesitaron tantos siglos para que se descubrieran estas regularidades dinámicas: la ley es simple sólo para aquellos que adquieren una nueva concepción de la simplicidad.

Las ecuaciones que involucran ritmos de cambio se denominan ecuaciones *diferenciales*. El ritmo de cambio de una cantidad se determina mediante la diferencia de sus valores en dos instantes cercados, y la palabra «diferencial» impregna, recordándonos dicho concepto, las matemáticas: cálculo diferencial, coeficiente diferencial, ecuación diferencial y simplemente diferencial. La resolución de ecuaciones algebraicas, aquellas que no involucran ritmos de cambio, no siempre es fácil, como la mayoría de nosotros hemos experimentado en nuestras propias carnes: la resolución de ecuaciones diferenciales es un orden de magnitud más difícil. Mirando retrospectivamente desde principios del siglo XXI, la sorpresa es que tantas ecuaciones diferenciales importantes *puedan* ser resueltas, con suficiente ingenio. Ramas enteras de las matemáticas han brotado de la necesidad de entender una única, crucial, ecuación diferencial.

A pesar de las dificultades técnicas en la resolución de ecuaciones diferenciales, se pueden establecer ciertos principios generales. El principio clave, para la presente discusión, es que la solución de las ecuaciones que describen el movimiento de algún sistema dinámico es *única* si se conocen las posiciones y las velocidades iniciales de todos los componentes del sistema. Una bicicleta posee unos cinco o seis componentes móviles esenciales: si sabemos lo que cada uno de ellos está haciendo *ahora*, podemos predecir el movimiento de la bicicleta desde el momento en que se la empuja hacia abajo hasta que cae en la cuneta. De manera más ambiciosa, si en un instante determinado se conocen las posiciones y las velocidades de cada una de las partículas que componen el Sistema Solar, entonces el movimiento subsecuente de cada una de ellas está unívocamente determinado.

La afirmación anterior supone, por simplicidad, que no existen influencias externas sobre dichos movimientos. El querer incluirlas nos lleva a decir que las posiciones y las velocidades de todas las partículas del universo, en un instante dado, determinan completamente su evolución futura. El universo sigue un camino dinámico único y predeterminado. *Sólo puede hacer una cosa.* Pierre Simon de Laplace (figura 3), uno de los matemáticos fundamentales del siglo XVIII, en su *Ensayo filosófico sobre las probabilidades*, lo expresa elocuentemente:

3. Pierre Simon de Laplace leyendo su *Mecánica celeste* (litografía del siglo XIX).

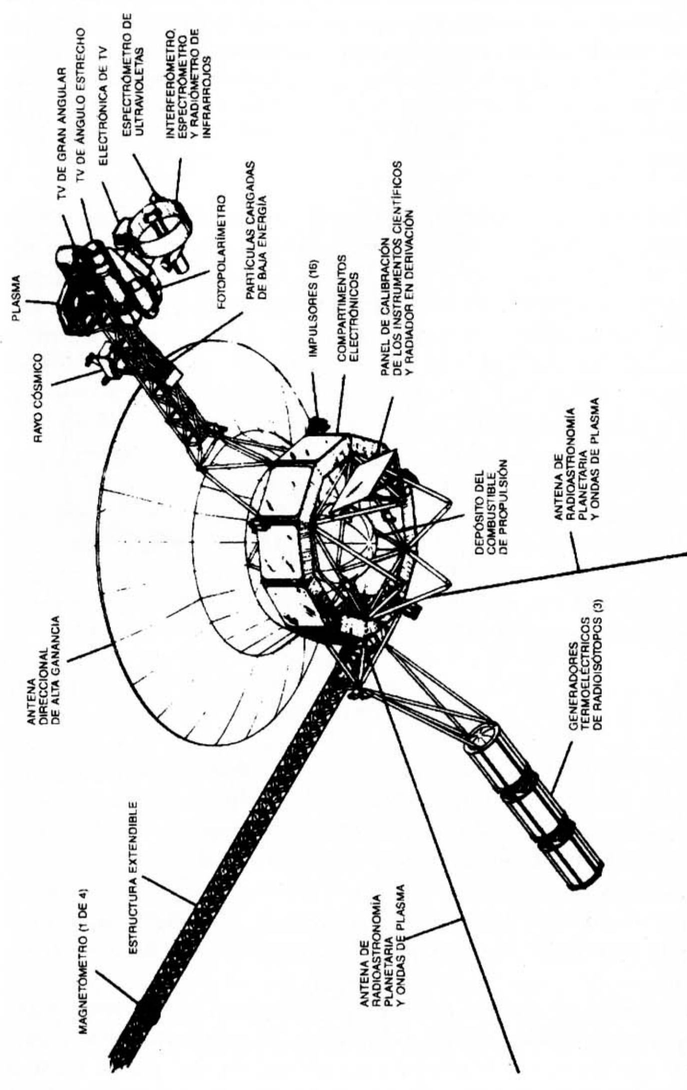
> Un ser inteligente que en un instante dado conociera todas las fuerzas que animan la Naturaleza y las posiciones de los seres que la forman, y que fuera lo suficientemente inmenso como para poder analizar dichos datos, podría condensar en una única fórmula el movimiento de los objetos más grandes del universo y el de los átomos más ligeros: nada sería incierto para dicho ser; y tanto el futuro como el pasado estarían presentes ante sus ojos.

Se trata de una afirmación demasiado imponente para haber sido deducida a partir de un teorema matemático inmediato sobre unicidad. Más adelante trataré de sacar a la luz algunos de los juegos de manos intelectuales involucrados en dicha transición, ya que son bastante escandalosos; pero dejemos estar de momento la interpretación anterior. Lo que debemos comprender, al considerar afirmaciones como las de Laplace, es el clima de entusiasmo que prevalecía en la ciencia de aquella época cuando un fenómeno tras otro —mecánica, calor, ondas, sonido, luz, magnetismo, electricidad— era dominado mediante la misma técnica. Debió de parecer el gran descubrimiento de la verdad definitiva. *Funcionaba*. El paradigma del determinismo clásico había nacido: si las ecuaciones describen la evolución del sistema unívocamente, en ausencia de perturbaciones externas aleatorias, su comportamiento está entonces unívocamente especificado en todo instante.

Viaje a Hiperión

Retrocedamos en el tiempo algunos años, al 5 de septiembre de 1977. Un gigantesco cohete Titán III-E/Centauro espera dispuesto en la plataforma de lanzamiento del Complejo 41, en el Campo de Pruebas Oriental de las Fuerzas Aéreas, Centro Espacial Kennedy, Cabo Cañaveral, Florida. En su parte más alta, empequeñecido por el gigante, pero siendo la razón de su existencia, hay un delicado triunfo de la ingeniería, la nave espacial *Voyager 1* (figura 4).

La cuenta atrás alcanza sus segundos finales. Dos impulsores gemelos de combustible sólido, rellenos de aluminio en polvo y perclorato amónico, se encienden con un rugido que puede oírse a quince kilómetros de distancia. El cohete, tan alto como un edificio



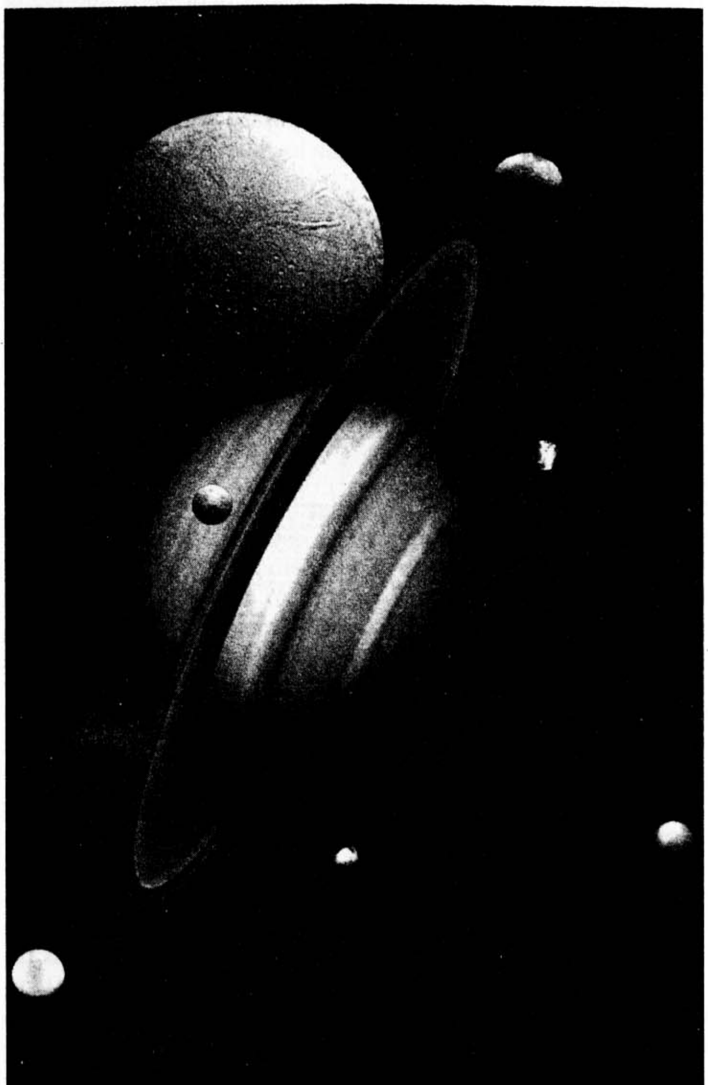
4. La nave espacial *Voyager*.

de quince pisos y de 700 toneladas de peso, tira de sí mismo hacia el cielo desde el profundo pozo de gravedad de la Tierra. Al principio su movimiento es penosamente lento, y quema una porción sustancial de su combustible en los primeros centenares de metros. A pesar de ello, a las diez horas del lanzamiento el *Voyager 1* está más lejos que la Luna, *de camino* hacia los planetas lejanos: Marte, Júpiter, Saturno (figura 5).

Dieciséis días antes, una nave gemela, el *Voyager 2*, ya había partido: el lanzamiento del *Voyager 1* había sido atrasado por problemas técnicos. En compensación, el *Voyager 1* seguiría una trayectoria más rápida de manera que llevara cuatro meses de adelanto sobre su nave gemela una vez que estuviera cerca de Júpiter. La misión del *Voyager 1* terminaría tras su encuentro con Saturno; pero el *Voyager 2* tendría la opción —que de hecho tomó positivamente— de continuar a Urano y Neptuno. Sólo Plutón no sería explorado, debido a que estaba en la parte lejana de su órbita y el «Grand Tour» no podía alcanzarlo.

El viaje de los *Voyagers* es un milagro de la ingeniería. También es un milagro de la matemática, que en este caso desempeña el papel de sirviente de la tecnología. La matemática gobierna el diseño de la sonda y de su vehículo de lanzamiento. La matemática calcula las cargas y las tensiones de la estructura metálica, la forma como se quema el combustible, la dinámica del aire que roza la superficie del vehículo durante su breve travesía de la atmósfera terrestre. La matemática gobierna los impulsos electrónicos que recorren los ordenadores cuando éstos vigilan inquietos cada paso, por diminuto que sea, del avance de la nave espacial. La matemática incluso decide la codificación de los mensajes de radio con los que los controladores terrestres comunican sus instrucciones a la sonda, que, a su debido tiempo, transmitirá a la Tierra imágenes sobrecogedoras de nuestro Sistema Solar.

Pero, por encima de todo, la matemática gobierna la majestuosa danza celestial de los planetas, sus lunas y las trayectorias de los *Voyagers* cuando llevan a cabo sus encuentros celestes. Una única y simple ley, la ley de Newton de la gravitación. No hay necesidad de las mejoras de Einstein: a las velocidades relativamente bajas que se dan en el Sistema Solar, la teoría de Newton es suficiente.



5. Saturno y algunos de sus satélites (montaje fotográfico obtenido a partir de los *Voyagers 1 y 2*).

Si el Sistema Solar estuviera compuesto únicamente por el Sol y la Tierra, la ley de Newton predeciría que ambos se mueven en elipses respecto de su centro de gravedad conjunto —un punto enterrado en las profundidades del Sol, debido a que la masa de la estrella es muchísimo mayor que la del planeta. En la práctica, la Tierra debería moverse a lo largo de un elipse con el Sol estacionario en uno de los focos. Pero la Tierra no se encuentra sola en el Sistema Solar —¿Qué sentido tendría, de lo contrario, enviar al *Voyager*? Cada planeta viaja a lo largo de su propia elipse, o lo haría si no existieran los otros. Éstos perturban su órbita ideal, acelerándolo o frenándolo. La danza cósmica es intrincada y elaborada: zarabanda de una partitura de Newton, *Largo con gravità*.

La ley determina cada paso de la danza de forma completa, exacta. Los cálculos no son fáciles, pero se pueden realizar con persistencia y un rápido ordenador, con precisión suficiente para los propósitos del *Voyager*. Utilizando las leyes matemáticas de Newton, los astrónomos han predicho el movimiento futuro del Sistema Solar durante más de 200 millones de años: en comparación con esto, unos pocos años son un juego de niños.

Pasemos Júpiter, un enigma estriado, atorbellinado. Llegamos a Saturno, un planeta dominado por anillos. Pero Saturno posee otras características de interés, principalmente sus lunas. A partir de las observaciones terrestres se sabía que dicho planeta tenía como mínimo diez satélites: el *Voyager* elevó el total a quince.

Una luna, Hiperión, es inusual. Posee una forma irregular, es como una patata cósmica. Su órbita es precisa y regular; pero su disposición en la órbita no lo es. Hiperión gira desordenadamente. Y lo hace de una forma compleja e irregular. Nada de este comportamiento desafía las leyes de Newton: los giros desordenados de Hiperión obedecen las leyes de la gravitación y de la dinámica.

Es hora de un ejercicio hipotético. Supongamos que el *Voyager 1* hubiera sido capaz de medir los giros de Hiperión con una precisión de diez cifras decimales. No lo hizo, pero seamos generosos. Supongamos, a partir de esta base, que los científicos en la Tierra realizaran la mejor predicción posible del movimiento futuro de Hiperión, predeterminado de acuerdo con las leyes de Newton. Entonces, sólo unos meses después, cuando el *Voyager 2* pasara por

Hiperión, podrían compararse sus predicciones con la realidad. Y lo que se esperarían encontrar es...

...que la predicción era totalmente errónea.

¿Un fallo de la predicción?

No exactamente.

¿Un fallo de las leyes de Newton?

No. Esperemos que la predicción sea incorrecta *debido* a la ley de Newton.

¿Indeterminación?¿Efectos externos aleatorios, tales como nubes de gas, campos magnéticos o viento solar?

No.

Algo mucho más extraordinario. Una característica inherente a las ecuaciones matemáticas de la dinámica. La capacidad de las ecuaciones, incluso simples, de generar movimientos tan complejos, tan sensibles a las medidas, que parecen aleatorios. Con toda propiedad, se la denomina *caos*.

Caos

Al igual que cualquier otra palabra técnica de moda, ésta no posee las mismas connotaciones que en la vida ordinaria. Consultemos el diccionario.

> **Caos** 1 (frec. may.). La materia desordenada y sin forma que se supone que existió antes del universo ordenado. 2. Desorden completo, confusión absoluta.

A estas dos definiciones los creadores de nuevos diccionarios tendrán que añadir la definición técnica. La que se muestra más adelante fue propuesta, tras un malestar inicial, en una prestigiosa conferencia internacional sobre caos que se celebró en la Real Sociedad de Londres en 1986. A pesar de que todos los presentes sabían el significado de «caos» —se trataba de su área de investigación, por lo que verdaderamente deberían saberlo—, pocos estaban dispuestos a dar una definición precisa. Esto no resulta extraño en un área de investigación «caliente»; se trata de definir algo cuando aún no se está completamente seguro de entenderlo. De todas formas, ésta es la definición:

> 3 (Matemáticas). Comportamiento estocástico que ocurre en un sistema determinista.

Aquí vuelven a aparecer dos nuevas palabras técnicas de moda, «estocástico» y «determinista». El determinismo de Laplace ya nos resulta familiar. «Estocástico» significa *aleatorio*. Para comprender el fenómeno del caos tendremos que analizar su significado con más detalle, ya que en su forma presente la definición es una paradoja. El comportamiento determinista está gobernado por leyes exactas e inamovibles. El comportamiento estocástico es el opuesto: sin ley e irregular, gobernado por el azar. Así, el caos es el «comportamiento sin ley gobernado completamente por la ley».

Como Hiperión.

Caos en la calculadora

¿Por qué se comporta Hiperión de esta manera? Aún no estamos en situación de decir el porqué, pero sí que podemos mostrar un ejemplo más accesible de caos con el que podéis experimentar por vosotros mismos. Todo lo que se necesita es una calculadora de bolsillo. Quien posea un ordenador personal, puede programarlo fácilmente para que haga lo mismo y le ahorre un montón de trabajo.

La ecuación que gobierna el movimiento de Hiperión es una ecuación diferencial. Lo que nos dice en la práctica es lo siguiente. Supongamos que en un instante dado conoces la posición y la velocidad de Hiperión. Existe una regla fija, que se aplica a dichos números, para obtener la posición y la velocidad en el instante siguiente. La regla se continúa aplicando una y otra vez hasta que se alcanza el instante deseado.

Se puede objetar que el tiempo es infinitamente divisible, de forma que no tiene sentido hablar de un instante, y mucho menos del instante siguiente. Puede que se tenga razón, aunque Zenón de Elea y diversos físicos modernos estarían en desacuerdo; ciertamente estás afirmando la posición convencional. Pero, en determinado sentido que se puede precisar de varias formas diferentes, la descripción anterior es moralmente correcta. En particular, el modo como un ordenador resuelve una ecuación diferencial es precisamente ese, en donde por «instante» se entiende «el paso temporal usado en el cálculo». El método funciona debido a que pasos temporales muy cortos producen una muy buena aproximación a un flujo temporal continuo.

Las ecuaciones del movimiento de Hiperión involucran muchas variables: posición, velocidad, rotación angular. *Podríais* introducirlas en vuestras calculadoras, pero la vida es corta. En vez de eso, elegiremos una ecuación mucho más sencilla. Permitidme remarcar que no tiene absolutamente nada que ver con el movimiento de Hiperión; pero ilustra el fenómeno del caos.

Mi calculadora posee una tecla $\boldsymbol{x^2}$, y supondré que la vuestra también la tiene. De lo contrario, × seguido de = produce el mismo efecto. Elegid un número entre 0 y 1, tal como 0,54321, y apretad la tecla $\boldsymbol{x^2}$. Repetidlo una y otra vez, y fijaros en los números. ¿Qué sucede?

Van disminuyendo. A la novena vez que aprieto la tecla de la calculadora obtengo cero y, dado que $0^2 = 0$, no es sorprendente que a partir de este momento no suceda nada interesante.

A este procedimiento se le denomina *iteración*: realizad la misma operación una y otra vez. Tratad de iterar algunas otras teclas de vuestra calculadora. En lo que sigue, he iterado a partir de 0,54321, pero se puede usar cualquier otro valor inicial. No obstante, evitad el 0. Con la calculadora en modo «radián», tras haber pulsado la tecla **cos** unas cuarenta veces obtengo el misterioso número 0,739085133 que permanece invariable. ¿Podéis adivinar qué propiedad especial posee dicho número? De todas formas, una vez más la iteración tiende a establecerse en un único valor: *converge* a un estado estacionario.

La tecla **tan** parece como si fuera a comportarse de la misma manera. Las apariencias engañan. La he iterado 300.000 veces con un ordenador y no llega a converger; tampoco se hace periódica. No obstante, se queda «atascada» en lugares en los que aumenta muy lentamente, digamos 0,0000001 por iteración. A este efecto se lo conoce como *intermitencia* y explica por qué a primera vista los números parecen converger.

Existen además infinitos valores iniciales para los que la secuencia de la tecla **tan** repite el mismo número una y otra vez, pero el 0

es el único que es probable encontrar por accidente. El comportamiento «típico» es intermitencia.

La tecla $\boldsymbol{e^x}$ produce un rápido crecimiento hasta 268 y pico, y luego da un mensaje de error debido a que se hace demasiado grande: tiende felizmente hacia el infinito. La tecla $\sqrt{}$ converge a 1.

La tecla **1/*x*** produce algo más interesante: el resultado cambia alternativamente entre 0,54321 y 1,840908673. La iteración es *periódica* con período 2; es decir, si aprietas la tecla dos veces vuelves de nuevo a donde empezaste. Probablemente podéis encontrar la explicación de esto.

Pulsad todas las teclas de vuestra calculadora: encontraréis que lo anterior parece agotar todos los posibles tipos de comportamiento.

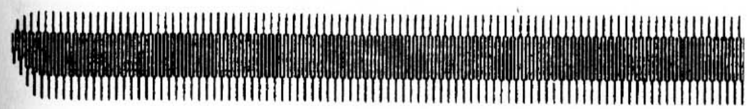
Pero ello puede deberse a que las teclas de las calculadoras están diseñadas para que realicen cosas agradables. Para evitar esto, podéis inventar nuevas teclas. ¿Qué tal una tecla $\boldsymbol{x^2 - 1}$? Para simularla, pulsad la tecla $\boldsymbol{x^2}$ y después **– 1 =**. Continuad repitiendo la operación. Pronto encontraréis que vais en ciclos del 0 al – 1, una y otra vez (figura 6). Ello tiene sentido:

$$0^2 - 1 = -1$$
$$(-1)^2 - 1 = 0.$$

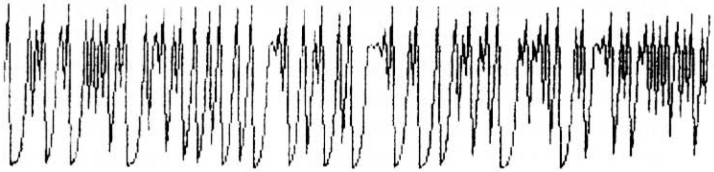
Pero los ciclos tampoco son nada nuevo.

Un último intento: una tecla $\boldsymbol{2x^2 - 1}$. Comenzad con un valor cualquiera entre 0 y 1, ambos exclusive. Parece bastante inofensivo, no puedo imaginar por qué debiera ocurrir algo especial. Hmmm... Salta bastante de un sitio a otro. Espero a que se asiente en algún lugar... Está suponiendo mucho tiempo, ¿verdad? No puedo reconocer ninguna pauta... Me parece bastante caótico (figura 7).

¡Ajá!



6. La iteración de $x^2 - 1$ conduce a oscilaciones regulares. El valor de x está representado verticalmente y el número de iteraciones horizontalmente.



7. La iteración de $2x^2 - 1$ conduce al caos.

Una ecuación sencilla: iterar $\mathbf{2x^2 - 1}$ simplemente. Pero el resultado no parece tan sencillo: de hecho *parece aleatorio*.

Ahora probemos de nuevo con la tecla $\mathbf{2x^2 - 1}$, pero empezando con 0,54322 en vez de con 0,54321. Continúa pareciendo aleatorio, y tras unas cincuenta iteraciones parece además completamente diferente.

Estáis viendo una especie de Hiperión-en-microcosmos. Una ecuación determinista: un resultado sin pauta. Un ligero cambio en el valor inicial y se pierde completamente la pista de a dónde se va. Lo que hace todo esto aún más extraordinario es que mientras que $\mathbf{2x^2 - 1}$ es tan extraño, la tecla superficialmente similar $\mathbf{x^2 - 1}$ se comporta perfectamente bien.

Os sugiero que no intentéis lo que sigue en vuestra calculadora, a menos que os gusten los cálculos largos; pero si poseéis un ordenador personal, ejecutad el programa que sigue. Podéis hacerlo más atractivo si así lo deseáis. No incluiré más programas, si bien los amantes de los ordenadores encontrarán instructivo escribir sus propios programas para experimentar con otros aspectos del caos.

```
10    INPUT k
20    x = 0,54321
30    FOR n = 1 TO 50
40    x = k * x * x - 1
50    NEXT n
60    FOR n = 1 TO 100
70    x = k * x * x - 1
80    PRINT x
90    NEXT n
100   STOP
```


Esto itera una tecla $\mathbf{kx^2 - 1}$ para una elección cualquiera de k. Las líneas 30-50 producen la secuencia de iteraciones inicial, cuyos resultados no son imprimidos, hasta que se establece el comportamiento «a largo plazo». Por ejemplo, si hacéis $k = 1{,}4$ obtenéis una tecla $\mathbf{1{,}4x^2 - 1}$. ¡Ella produce un ciclo bastante complicado a través de *dieciséis* valores diferentes! El caos se establece alrededor de $k = 1{,}5$. Después de ello, cuanto más grande se hace k, tanto más caótico es el resultado.

O así lo parece. Pero la situación no es tan fácil.

Para $k = 1{,}74$ se obtiene un caos ya desarrollado. Para $k = 1{,}75$ parece lo mismo, al principio. Excepto que tras unas cincuenta iteraciones se establece un ciclo de longitud tres, con números alrededor de:

$$0{,}744 \qquad -0{,}030 \qquad -0{,}998.$$

A partir del caos surge una pauta. Los dos están unidos de forma inextricable.

Espero que encontréis esto misterioso y estimulante.

Si es así, os animo a que exploréis el comportamiento en el rango $k = 1$ a $1{,}40155$, e incluso más allá de este valor. Puede que necesitéis utilizar unos ciclos mayores en las líneas 30 o 60 para ver la pauta completa, cuando exista una.

Unas palabras acerca de los ordenadores y el caos. Tendemos a creer que los cálculos de ordenador son el sumo de la precisión. En realidad no lo son. Las limitaciones de memoria implican que los números sólo pueden ser almacenados en el ordenador con poca precisión, digamos que con unas ocho o diez cifras decimales. Además, el código «privado» interno que el ordenador utiliza para representar los números y el código «público» que aparece escrito en la pantalla son diferentes. Esto introduce dos fuentes de error: errores de redondeo en los cálculos internos y errores de traducción del código privado al público. Normalmente dichos errores no importan demasiado, pero uno de los hechos característicos del caos es que los errores, incluso los pequeños, se propagan y crecen.

La situación sería bastante más simple si todos los ordenadores utilizaran los mismos códigos. Pero evidentemente no ocurre así. Ello significa que *un programa idéntico ejecutado en dos ordenadores distintos puede producir resultados diferentes*. Lo mismo sucede cuando una misma máquina ejecuta versiones diferentes del «mismo» *software*. De vez en cuando mencionaré resultados numéricos obtenidos con mi ordenador. ¡Sed conscientes de que el vuestro puede no dar el mismo resultado exactamente! Pero si exploráis con números cercanos a los míos, deberíais poder encontrar el mismo comportamiento que yo.

¿Qué hemos descubierto?

Un milagro. El orden y el caos emergen, íntimamente entrelazados, de una fórmula tan simple como $\boldsymbol{kx^2 - 1}$. Algunos valores de k conducen a iteraciones ordenadas, otros —notablemente parecidos— al caos. ¿Cuáles? Ah, eso ya es investigación matemática.

Empezamos no entendiendo el movimiento de Hiperión: ahora no entendemos ni siquiera $2x^2 - 1$. En términos matemáticos ello constituye un éxito estupendo.

Se trata de un avance porque estamos empezando a descubrir *dónde está el problema*. Antes de juguetear con la calculadora, se nos habría disculpado por suponer que existían complicaciones bastante grandes en el problema de Hiperión. Ahora sabemos que no es así. Las complicaciones no tienen nada que ver con él. Lo que sucede es algo muy sutil, fundamental y absolutamente fascinante.

Todo ello me produce un gran descontento con los cosmólogos que nos dicen que han comprendido bastante bien los orígenes del Universo, excepto el primer milisegundo, más o menos, del Big Bang. Y con los políticos que no sólo nos aseguran que una gran dosis de monetarismo será buena para nosotros, sino que están tan seguros de ello que piensan que unos pocos millones de desempleados no son más que un pequeño hipo. El ecologista matemático Robert May alzó su voz con argumentos similares en 1976. «No sólo en investigación, sino también en el mundo ordinario de la política y la economía, estaríamos mucho mejor si hubiese más gente que comprendiera que los sistemas simples no poseen necesariamente propiedades dinámicas simples.»

El hinduismo y el arte de la conservación mecánica

Analizaremos a continuación cómo la civilización occidental llegó a ver el universo como un mecanismo de relojería, y se engañó a sí misma creyendo que las ecuaciones deterministas conducen siempre a un comportamiento regular. La mente oriental tiende a tener una actitud filosófica diferente. Los hindúes, por ejemplo, le atribuyen al caos un papel más sutil que el de mera confusión sin forma, y reconocen la unidad subyacente al orden y el desorden. En la mitología clásica hindú el cosmos atraviesa tres grandes fases: creación, conservación y destrucción, reflejando el nacimiento, la vida y la muerte. Brahma es el dios de la creación, Vishnú el dios de la conservación (orden) y Shiva el dios de la destrucción (desorden). Pero la personalidad de Shiva posee multitud de facetas. Shiva es el que camina desmandadamente, el cazador solitario, el bailarín, el yogui que se retira de la sociedad humana, el asceta cubierto de cenizas. El indómito. La distinción entre el orden de Vishnú y el desorden de Shiva no es la que existe entre el bien y el mal. Representa, en vez de ello, dos modos diferentes de manifestarse la divinidad: benevolencia y cólera; armonía y discordia.

De la misma forma, los matemáticos empiezan a considerar el orden y el caos como dos manifestaciones distintas de un determinado subyacente. Y ninguna de ellas existe por separado. El sistema típico puede existir en una diversidad de estados, algunos ordenados, algunos caóticos. En vez de polaridades opuestas, existe un espectro continuo. Igual que la armonía y la disonancia se combinan en la belleza musical, el orden y el caos se combinan en la belleza matemática.