2

Ecuaciones para todo

> Así, contrariamente a los demás, creo que es gratuito el preguntarse por las causas del movimiento hacia el centro cuando es tan patente, por la observación de los fenómenos mismos, el hecho de que la Tierra ocupa el lugar central en el universo y que todos los cuerpos se mueven hacia ella.
>
> TOLOMEO, *Almagesto*

La metáfora de un mundo que funciona como un reloj se remonta a mucho tiempo atrás y es importante que apreciemos cuán profundamente arraigada se encuentra. Antes de ocuparnos del caos, primeramente hemos de estudiar las leyes.

Un buen lugar para comenzar lo constituye la Grecia antigua, con Tales de Mileto. Éste nació alrededor del 624 a.C., murió sobre el 546 a.C. y es famoso por haber predicho un eclipse de Sol. Probablemente, adoptó el método de predecir eclipses empleado por los egipcios o los caldeos, y su predicción sólo fue correcta con un margen de error de un año más o menos. Sea como fuere, el eclipse ocurrió en un momento propicio, interrumpiendo una batalla entre lidios y medas, y el Sol quedó casi completamente oscurecido. Estas circunstancias casuales aumentaron, sin duda, la reputación de Tales como astrónomo. Una de las frustraciones de ser un historiador es la forma en que, casi por accidente, algunos sucesos pueden datarse con exactitud mientras que otros quedan como conjeturas. Nuestro conocimiento de la fecha de nacimiento de Tales se basa en los escritos de Apolodoro; la de su muerte, se debe a Diógenes Laercio: ambas fechas son poco fiables. Pero sin ninguna

sombra de dudas, el eclipse fue el del 28 de mayo del año 585 a.C. Tan fiable resulta el tic-tac del reloj cósmico que, dos milenios y medio después, podemos calcular no sólo cuándo ocurrieron los eclipses antiguos, sino también los lugares sobre la superficie de la Tierra desde los que se pudieron ver. Los eclipses solares son raros y el anterior, en particular, es el único del que, razonablemente, pudo haber sido testigo Tales. Los conocimientos astronómicos todavía proporcionan a los historiadores uno de los mejores métodos para datar sucesos.

Se dice que Tales iba caminando una noche y quedó tan absorto en su estudio del cielo nocturno que cayó en una zanja. Una acompañante le comentó: «¿Cómo puedes decir qué va a suceder en los cielos si no puedes ver lo que se extiende bajo tus propios pies?». En cualquier caso, esta historia resume las actitudes que dieron lugar a la mecánica clásica. Los filósofos de la Grecia antigua podían calcular los movimientos de los planetas con una exactitud pasmosa, pero todavía creían que los objetos pesados caían más rápidamente que los ligeros.

La dinámica sólo comenzó a progresar cuando los matemáticos apartaron sus ojos del cosmos y miraron más atentamente —y más críticamente— lo que sucedía bajo sus propios pies. Tolomeo imaginó que la Tierra se encontraba estacionaria en el centro de todo porque tomó demasiado al pie de la letra la evidencia aportada por sus propios sentidos y no acertó a la hora de cuestionar su significado. Pero la cosmología proporcionó el estímulo, y es dudoso que cuestiones más prácticas hubiesen proporcionado suficiente inspiración.

Revolución cósmica

La cosmología primitiva está bien surtida de imaginación mitológica, pero es deficiente en contenidos objetivos. Nos encontramos con visiones de una Tierra plana sostenida por un elefante, del dios Sol guiando su carruaje a través del cielo, y de estrellas que —anticipándose al alumbrado eléctrico— cuelgan de cuerdas y se apagan durante el día. El punto de vista pitagórico no era menos místico, si bien concedía mayor importancia al significado mágico de los números, y, sin darse cuenta, introdujo la matemática en escena. Platón sugería que la Tierra se encontraba en el centro del universo, con todos los demás objetos girando a su alrededor en una serie de esferas huecas. También creía que la Tierra era redonda, y su creencia, de inspiración pitagórica, de que todo, incluso el movimiento de los cielos, era una manifestación de la regularidad matemática, resultó enormemente influyente.

Eudoxo, un extraordinario matemático, que también inventó la primera teoría rigurosa de los números irracionales, se dio cuenta de que el movimiento observado de los planetas respecto de las estrellas no se ajustaba al ideal platónico. Las trayectorias seguidas por los planetas estaban inclinadas, y, muy frecuentemente, parecía como si éstos se movieran hacia atrás. Eudoxo concibió una descripción matemática en la cual se consideraba que los planetas estaban montados sobre una serie de veintisiete esferas concéntricas, cada una girando alrededor de un eje sostenido por la más próxima. Sus sucesores mejoraron el ajuste con las observaciones añadiendo esferas adicionales. Sobre el año 230 a.C., Apolonio suplantó este sistema con una teoría de epiciclos, en la que los planetas se movían en pequeños círculos cuyos centros, a su vez, giraban en círculos mayores. Claudio Tolomeo, que vivió en Alejandría entre los años 100-160 d.C., perfeccionó el sistema de los epiciclos hasta que éstos se ajustaron tan bien a las observaciones que nada los suplantó durante 1.500 años. Fue un triunfo de la matemática empírica.

Engranajes de los griegos

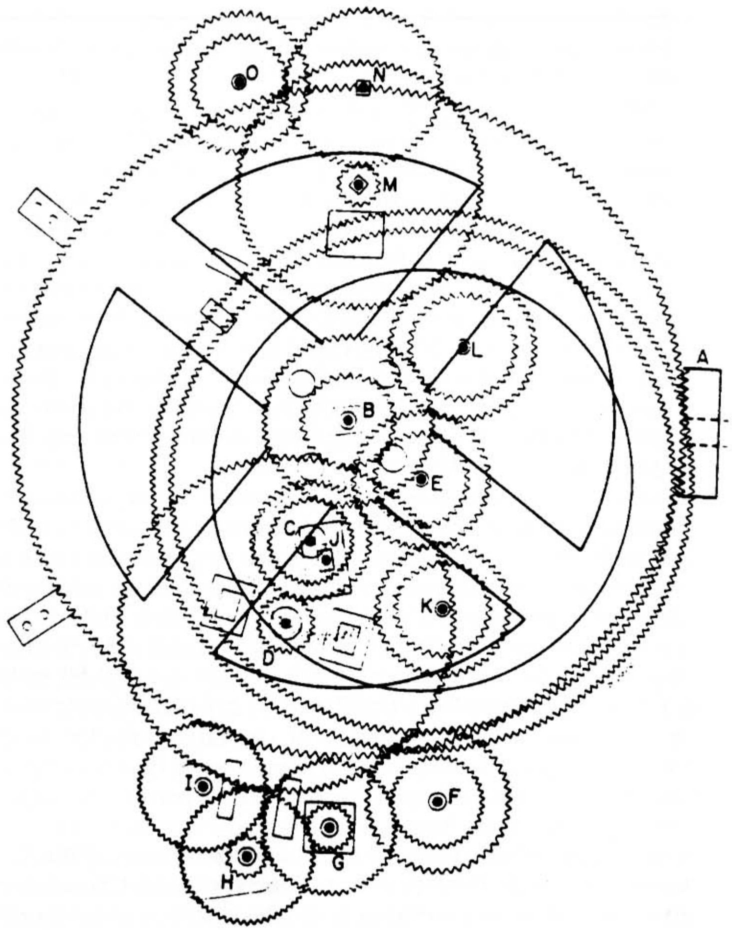
La metáfora de que los cielos se mueven análogamente a como funciona la maquinaria de un reloj puede tener una base más literal. Nuestras ideas sobre la cultura griega antigua provienen en su mayoría de su vertiente intelectual: filosofía, geometría, lógica. La tecnología ha recibido menos atención. En parte, esto es debido a que han sobrevivido pocos ejemplos de la tecnología griega. Se nos ha contado que los griegos valoraban la lógica, matemática intelectual, por encima de la logística, matemática práctica. Pero nuestras fuentes sobre esta visión del tema no son imparciales y hoy en día pueden oírse afirmaciones similares en los pasillos de los departamentos de lógica matemática. La historia completa de la tecnología griega puede que no se conozca nunca, pero los indicios que poseemos son intrigantes.

En 1900, unos pescadores estaban buscando esponjas alejados de la costa de la diminuta isla griega de Antikitera (enfrente de la gran isla de Kitera, entre la tierra firme de Grecia y Creta). Hallaron los restos de un barco que se hundió durante una tormenta, en el año 70 a.C., mientras navegaba de Rodas a Roma. Su botín incluía estatuas, cerámica, ánforas y monedas, junto con una masa informe de metal corroído. Cuando esta masa se secó y se separó en piezas, reveló trazas de engranajes. En 1972, Derek de Solla Price observó este material con rayos X y fue capaz de reconstruir un complicado dispositivo de treinta y dos ruedas dentadas (figura 8). Pero, ¿para qué servía? Analizando su estructura, decidió que debía de usarse para calcular las posiciones del Sol y de la Luna en relación con el fondo de las estrellas.

El mecanismo de Antikitera tiene características muy interesantes, entre ellas el de ser el ejemplo más remoto que se conoce de un engranaje diferencial. Tales engranajes se emplean ahora en los ejes traseros de los coches para que las ruedas se muevan a diferentes velocidades, por ejemplo, al tomar una curva. En el mecanismo de Antikitera era necesario un engranaje diferencial para calcular las fases de la Luna sustrayendo el movimiento del Sol del de la Luna. El aparato es complejo y está fabricado con una precisión considerable, lo que indica la existencia de una larga tradición en el corte de engranajes y en máquinas engranadas en la Grecia antigua. No han sobrevivido más ejemplos, probablemente porque las máquinas viejas y rotas fueron fundidas para reaprovechar su metal.

En su artículo «Gears from the Greeks» (*Proceedings of the Royal Institution*, vol. 58 [1986]), el matemático británico Christopher Zeeman especuló sobre la influencia de tales aparatos en la ciencia griega:

> Primero vinieron los astrónomos observando los movimientos de los cuerpos celestes y recogiendo datos. En segundo lugar, los matemáticos inventando la notación matemática para describir los movimientos y ajustar los datos. En tercer lugar, los técnicos haciendo modelos mecánicos para simular aquellas construcciones matemáticas. En cuarto



8. Engranaje en el mecanismo de Antikitera, calculador planetario de la Grecia antigua.

puesto, generaciones de estudiantes que aprendieron astronomía a partir de estas máquinas. En quinto lugar, científicos, cuya imaginación estaba tan deslumbrada por generaciones de dicho aprendizaje que realmente creyeron que era así como funcionaban los cielos. En sexto lugar vinieron las autoridades, quienes insistieron sobre el dogma recibido. Y así, la raza humana se engañó y aceptó el sistema tolemaico durante un millar de años.

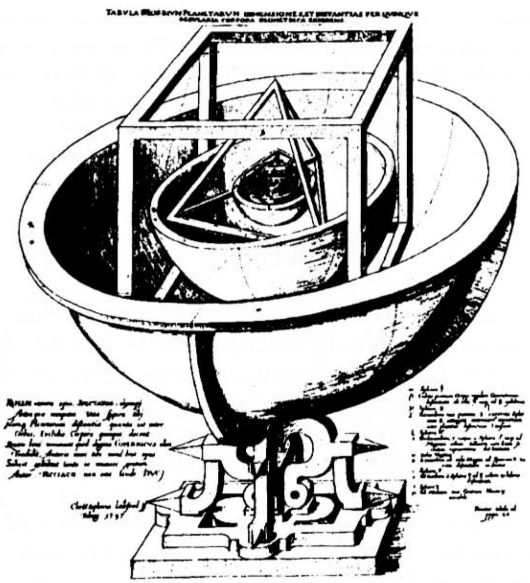
El Sol central

En 1473 Nicolás Copérnico se dio cuenta de que la teoría tolemaica contenía un gran número de epiciclos *idénticos* y descubrió que podía eliminarlos si consideraba que la Tierra giraba alrededor del Sol. Los epiciclos idénticos eran trazas del movimiento de la Tierra, superpuesto sobre los movimientos de los restantes planetas. De golpe, esta teoría *heliocéntrica* redujo el número de epiciclos a treinta y uno.

Johannes Kepler quedó igualmente insatisfecho con la revisión de Tolomeo que hizo Copérnico. Éste heredó una serie de observaciones astronómicas nuevas y extremadamente precisas realizadas por Tycho Brahe y estaba buscando las estructuras matemáticas que había tras ellas. Tenía una mentalidad abierta, tan abierta que algunas de su ideas, tal como la relación entre la separación de las órbitas planetarias y los poliedros regulares (figura 9), parecen bastante ridículas hoy en día. Posteriormente, Kepler abandonó esta teoría cuando se dio cuenta de que estaba en conflicto con las observaciones; todavía no disponemos de ninguna teoría sobre la formación de los planetas que explique correctamente los tamaños y las distancias de los mismos.

Finalmente fue forzado, casi contra su voluntad, a formular su primera ley: los planetas se mueven en órbitas elípticas alrededor del Sol. Implícitas en este trabajo hay otras dos leyes que posteriormente adquirieron una enorme significación. La segunda ley establece que la órbita de un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales. La tercera ley sostiene que el cubo de la distancia entre el Sol y el planeta es proporcional al cuadrado del período de su órbita.

La teoría de Kepler es estéticamente mucho más atractiva que un revoltijo de epiciclos, pero, al igual que sus predecesoras, es pu-



9. Modelo de Kepler de las distancias entre las órbitas de los planetas, basado en los cinco poliedros regulares (publicado en 1596).

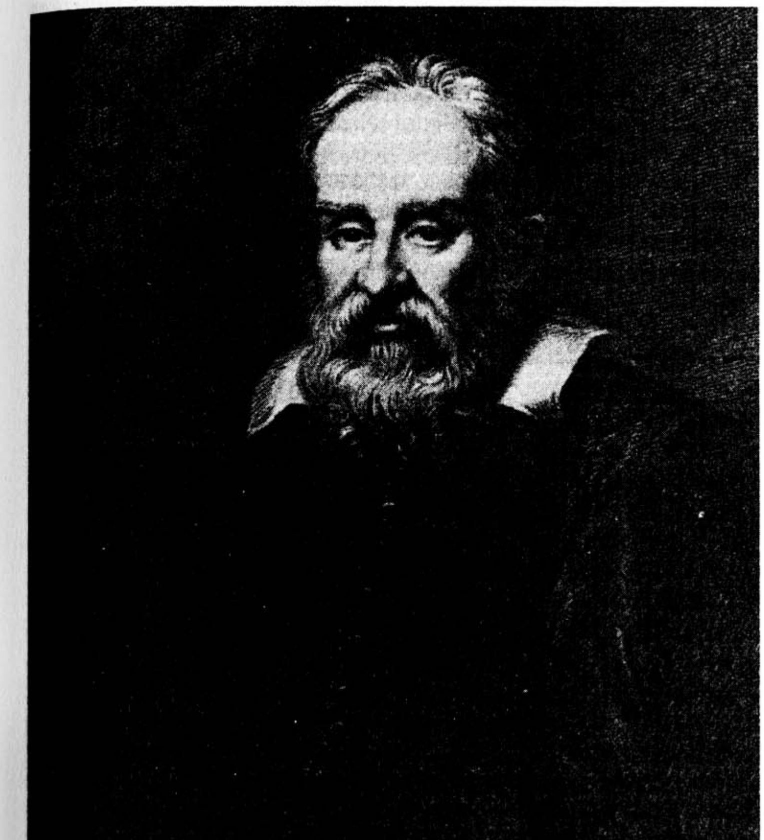
ramente descriptiva. Dice *qué* hacen los planetas, pero no da un fundamento unificador. Antes de que la cosmología pudiese ir más allá de Kepler, hubo de resignarse a ser realista y poner los pies en la tierra.

Oscilación del péndulo

La vida debía de ser excitante para los estudiantes de la Universidad de Pisa en la década de 1580, pues fue un período de avances espectaculares en el conocimiento humano. Pero la excitación no podía continuar todo el tiempo. Durante un servicio religioso, un estudiante debió de aburrirse, puesto que su atención se distrajo y comenzó a mirar una gran lámpara que se balanceaba con la brisa. Ésta oscilaba erráticamente, pero él notó que cuando la oscilación

era más amplia, su velocidad aumentaba, de forma que el tiempo empleado en una oscilación permanecía constante. Por entonces todavía no se habían inventado relojes precisos, de modo que midió el tiempo empleado por la lámpara usando su pulso.

El estudiante era Galileo Galilei (figura 10), quien entró en la Universidad a la edad de diecisiete años para estudiar medicina, y



10. Galileo Galilei, fundador de la mecánica teórica y experimental (reproducido con permiso de John Wiley & Sons Ltd.).

tuvo incluso que recibir clases particulares de matemáticas. Galileo nació en Pisa en 1564 y murió en 1642. Del mismo modo que fue un científico de primer orden, también fue una destacada figura literaria, un escritor elegante y hábil. Tenía un banco de herramientas con el que fabricó sus propios telescopios: descubrió que Júpiter tenía cuatro lunas, los primeros cuerpos celestes *conocidos* que no giraban alrededor de la Tierra. Tenía talento para el pensamiento claro, prefiriendo las explicaciones lógicas simples a los argumentos floridos, ideados para complicar y oscurecer. Vivió en una época que aceptaba las explicaciones de los sucesos en función de sus propósitos religiosos. Por ejemplo, la lluvia caía *porque* su propósito era regar los cultivos; una piedra lanzada al aire caía al suelo *porque* ese era el lugar que le correspondía.

Galileo se dio cuenta de que las preguntas sobre el propósito de las cosas no proporcionaban a la humanidad control sobre los fenómenos naturales. En lugar de preguntar *por qué* cae la piedra, él buscaba una descripción precisa de *cómo* cae. En lugar del movimiento de la Luna, en el que él no podía influir o regular, estudió bolas rodando sobre planos inclinados. Y, en un golpe genial, confinó su atención a unas pocas cantidades clave: tiempo, distancia, velocidad, aceleración, momento, masa, inercia. En una época más propicia a cualidades y esencias, su elección mostró un notable dominio de lo fundamental, especialmente debido a que muchas de las variables por él elegidas no se prestaban de forma inmediata a ninguna medida cuantitativa.

El tiempo, en particular, le causó a Galileo muchos dolores de cabeza. No se puede medir el tiempo de una piedra que cae, mirando cuánto se acorta una vela ardiendo. Él usó relojes de agua y el ritmo de su propio pulso, y, según Stillman Drake, canturreaba para sí mismo, marcando el ritmo del mismo modo en que lo haría un músico. Para ralentizar los fenómenos dinámicos y mejorar la precisión de sus medidas de tiempos, estudió el caso de una bola rodando sobre una pendiente suave, en lugar de una que cayera libremente. Y mediante una mezcla de experimentos ideales y reales llegó a una elegante descripción de cómo caen los cuerpos bajo la acción de la gravedad.

De acuerdo con el espíritu de la geometría griega —en la que todos los objetos estaban idealizados, de modo que una línea no

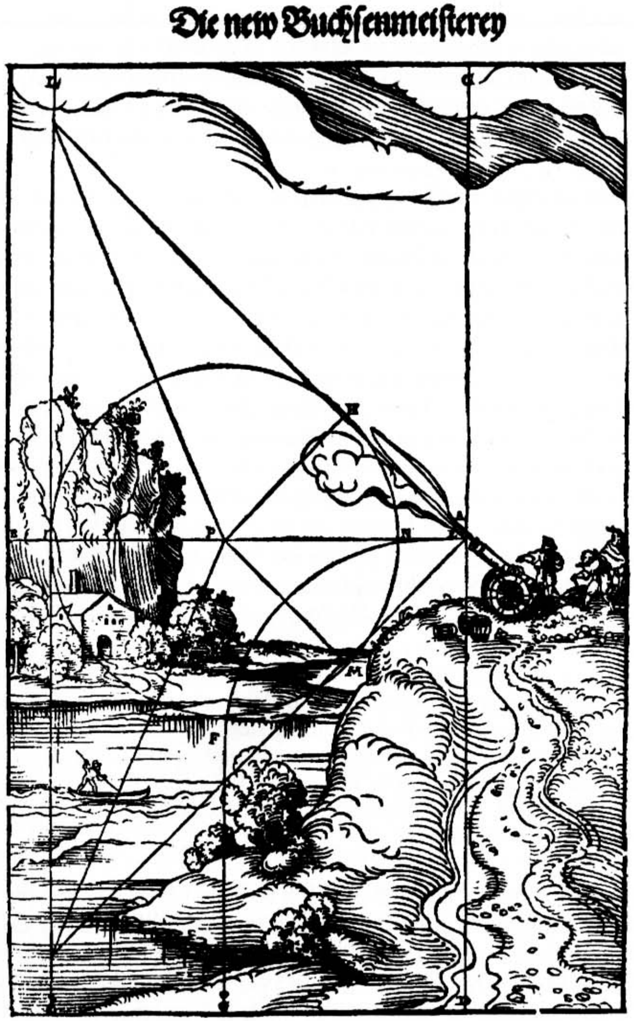
tiene anchura y un plano no tiene espesor— Galileo idealizó su mecánica, eligió el despreciar efectos tales como la resistencia del aire, para poder buscar las simplicidades subyacentes. A fin de desenredar la maraña de influencias interrelacionadas que controlan el mundo natural, es mejor empezar estudiando una hebra cada vez.

En los tiempos medievales se pensaba que el recorrido de un proyectil tenía lugar en tres partes: un movimiento inicial en línea recta, una porción de un círculo y una caída vertical final (figura 11). Galileo descubrió que la velocidad de un cuerpo que cae aumenta a un ritmo constante, es decir, su *aceleración* es constante. De esto dedujo el recorrido correcto, una parábola. También mostró que una bala de cañón alcanza una distancia máxima cuando se lanza con un ángulo de 45°. Encontró leyes para la composición de las fuerzas. Se dio cuenta de que, en ausencia de la resistencia del aire, una masa pesada y una ligera deben caer con la misma velocidad. Hoy en día, todo esto puede parecer bastante simple; apenas vale la pena mencionarlo; pero fueron las primeras evidencias sólidas de que la regla de la ley natural podría ser leída por la humanidad. Galileo tenía un agudo sentido del humor, como consta cuando expuso su teoría heliocéntrica en su *Diálogo sobre los dos principales sistemas del mundo*:

> Yo diría que cualquiera que considere más razonable que todo el universo se mueve a fin de dejar que la Tierra permanezca fija sería más irracional que uno que escalara hasta la parte superior de una cúpula para tener una panorámica de la ciudad y sus alrededores y entonces pidiera que todo el campo girara alrededor suyo, de forma que él no se molestara en girar su cabeza.

Un sistema de ley natural para los objetos celestes; otro para los objetos mundanos. Kepler con su vista puesta en el cielo y Galileo con su oído en el suelo. Era casi impensable que hubiera una conexión entre los dos reinos. El cielo era puro, inmaculado, la casa de Dios y sus ángeles; la Tierra era el lugar del hombre pecador.

Un simple golpe de intuición cambió para siempre esta percepción.



11. Teoría medieval del movimiento de un proyectil como mezcla de movimientos en línea recta y circular: el diagrama de la trayectoria se debe a Tartaglia; aquí se ha sobrepuesto a un paisaje en *Der Geometrischen Buchsenmeisterey* de Walter H. Ryff.

Gravedad y geometría

Algunos grandes científicos han sido niños prodigio, pero el joven Isaac Newton fue un niño relativamente normal, excepto por su destreza para construir aparatos. El gato de la familia, del que se dice que desapareció en un globo de aire caliente, lo sufrió en carne propia. Newton nació en 1642 en la aldea de Woolsthorpe, y fue un bebé prematuro y enfermizo. No resaltó particularmente como estudiante en el Trinity College de Cambridge. Pero cuando se produjo la gran peste, regresó a su aldea natal. Alejado de la vida académica, y casi sin ayuda de nadie creó la óptica, la mecánica y el cálculo. Al final de su vida fue director de la Real Casa de la Moneda y presidente de la Real Sociedad Inglesa. Murió en 1727.

Galileo descubrió que un cuerpo que se mueve sometido a la gravedad terrestre adquiere una aceleración constante. Newton perseguía un objetivo de mayor envergadura: un código de leyes que gobernase el movimiento de un cuerpo bajo todas las combinaciones de fuerzas.

En cierto sentido, el problema era geométrico y no dinámico. Si un cuerpo se mueve con una velocidad uniforme, entonces la distancia que recorre es el producto de su velocidad por el tiempo que ha transcurrido. Si se mueve con velocidad no uniforme no existe una fórmula tan simple. Los matemáticos anteriores a Newton hicieron importantes progresos, mostrando que varias cuestiones dinámicas básicas podían expresarse en forma geométrica. Sin embargo, rara vez era fácil resolver los problemas geométricos.

Una gráfica que muestre cómo varía la velocidad del cuerpo con el tiempo tiene la forma de una curva. Por argumentos geométricos puede mostrarse que la distancia total recorrida es igual al *área* comprendida bajo la curva. Similarmente, la velocidad es la pendiente de la *tangente* de otra gráfica, que representa la distancia frente al tiempo. Pero, ¿cómo hallar estas áreas y tangentes? Newton e, independientemente, Gottfried Leibniz resolvieron estos problemas dividiendo el tiempo en intervalos cada vez más diminutos. El área comprendida bajo una curva resulta ser la suma de las áreas de un gran número de estrechas bandas verticales. Demostraron que el error cometido por tal aproximación resulta mínimo a medida que el intervalo temporal se hace cada vez menor, y argumentaron que «en el límite» el error puede llegar a anularse totalmente. Del mismo modo, la pendiente de una tangente puede calcularse considerando dos valores del tiempo muy próximos y permitiendo que la diferencia entre ambos sea arbitrariamente pequeña. Ningún matemático pudo proporcionar de forma lógica una justificación rigurosa para este método, pero ambos estaban convencidos de que era correcto. Leibniz hablaba de cambios «infinitesimales» en el tiempo; Newton tenía una imagen más física de las cantidades que fluyen continuamente, y las llamó *fluentes* y *fluxiones*.

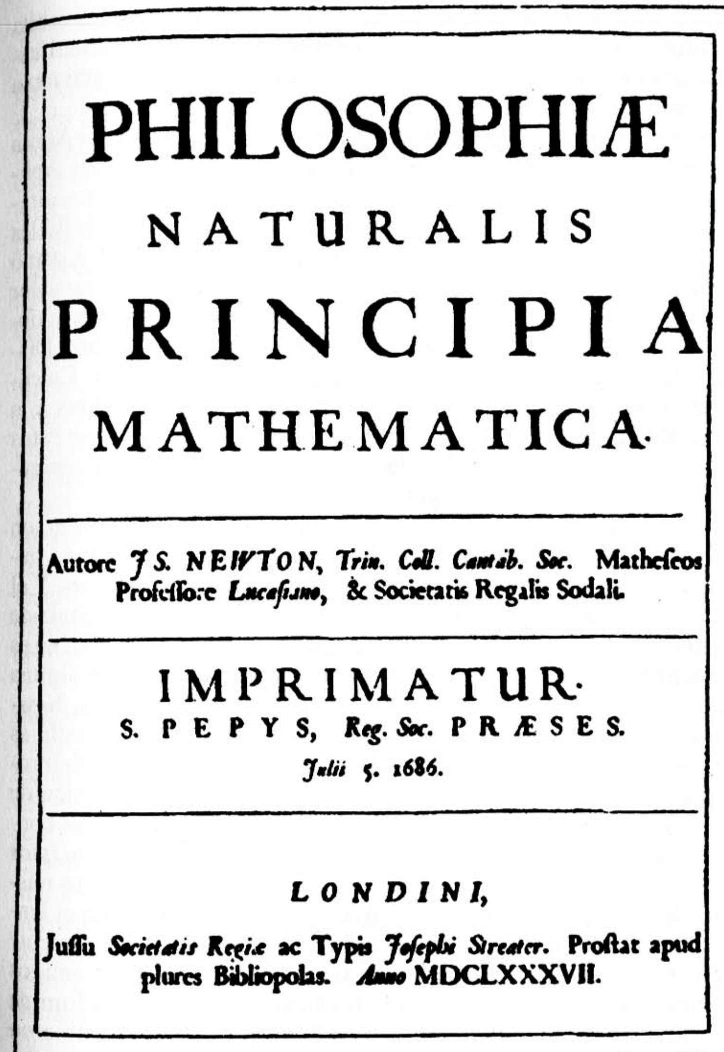
Estos métodos del cálculo, conocidos ahora como *integración* y *diferenciación*, resolvieron los problemas prácticos de determinación de distancias a partir de velocidades o de velocidades a partir de distancias. Pusieron una enorme riqueza de fenómenos naturales al alcance del análisis matemático.

El sistema del mundo

Los *Principios matemáticos de la filosofía natural* (figura 12), que contienen las leyes del movimiento, fueron publicados en tres volúmenes. Le debieron mucho a Galileo, como Newton debidamente reconoció, y estaban basados en una filosofía científica similar. En ellos, Newton redujo todo el movimiento a tres leyes simples expuestas en el primer volumen:

- Si no actúan fuerzas sobre un cuerpo, entonces éste permanece en reposo o se mueve uniformemente en línea recta.
- Su aceleración es proporcional a la fuerza que está actuando.
- A cualquier acción corresponde siempre una reacción igual y opuesta.

Newton también demostró que las leyes de Kepler del movimiento planetario se obtienen a partir de estas tres leyes, junto con la ley de la gravedad del inverso del cuadrado de la distancia. Pero el verdadero significado de la concepción de Newton sobre la gravedad no es tanto el que pueda ser descrita numéricamente. La ley de Newton es *universal*. Cada partícula de materia en el universo



PHILOSOPHIÆ

NATURALIS

PRINCIPIA

MATHEMATICA.

Autore J S. NEWTON, *Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheseos Professore *Lucasiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.

S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.

Julii 5. 1686.

LONDINI,

Jussu *Societatis Regiæ* ac Typis *Josephi Streater*. Prostat apud plures Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

12. Portada de los *Principios matemáticos de la filosofía natural* de Newton.

atrae a toda otra partícula de acuerdo con esa misma ley. La órbita de Júpiter y la trayectoria de una bala de cañón son dos manifestaciones de la *misma* ley. El hombre está en su Cielo y el universo vuelve a ser uno.

El descubrimiento se efectúo y elaboró en el tercer libro. «Ahora —dijo Newton— demuestro el sistema del mundo.» Y lo hizo. Aplicó esta teoría de la gravitación al movimiento de los planetas alrededor del Sol y de los satélites alrededor de sus planetas. Halló las masas de los planetas y del Sol relativas a la de la Tierra. Estimó la masa de laTierra con un error del 10 por 100 respecto de su valor verdadero. Demostró que la Tierra es achatada en los polos y obtuvo una estimación bastante aproximada de tal achatamiento. Discutió la variación de la gravedad sobre la superficie terrestre. Calculó las irregularidades en el movimiento de la Luna debidas a la atracción del Sol, y las órbitas de los cometas, mostrando que estos supuestos precursores sin ley del descontento cósmico estaban gobernados por las mismas leyes que los planetas.

Aldous Huxley dijo una vez que «quiza los hombres geniales son los únicos hombres verdaderos. En toda la historia de la raza humana sólo ha habido unos pocos miles de verdaderos hombres. Y el resto de nosotros ¿qué somos? Animales educables. Sin la ayuda de los verdaderos hombres, casi no habríamos encontrado nada». No es necesario estar de acuerdo con Huxley para aceptar que alguna gente ha tenido un impacto desproporcionado en la historia. Newton fue un «verdadero hombre». Del mismo modo, «el cálculo es verdadera matemática» y ha tenido un impacto igualmente desproporcionado. Pero la importancia del cálculo para la dinámica de Newton no fue obvia inmediatamente para la mayoría de sus contemporáneos. La razón es simple: en ningún lugar de los *Principios matemáticos de la filosofía natural* se hacía uso explícito de los mismos. En su lugar, Newton construye sus demostraciones en el lenguaje de la geometría griega clásica. Pero el cálculo vio finalmente la luz del día en 1736, gracias a los afanes de los científicos amigos de Newton. Al final del siglo XVII los matemáticos de toda Europa estaban en total posesión de los métodos del cálculo, y recibieron de Newton una fuerte indicación de que las páginas de la naturaleza estaban abiertas a cualquiera con la inteligencia suficiente para leerlas. No necesitaron más estímulo.

Campanas y silbatos

La palabra «análisis» se usa hoy en día para describir el cálculo en su forma más rigurosa: la teoría que subyace bajo la técnica computacional. Adquirió dicha connotación durante el siglo XVIII, cuando el aspecto teórico del cálculo se fue extendiendo sustancialmente. El principal artífice de tal desarrollo fue Leonhard Euler, el matemático más prolífico de todos los tiempos. Euler también fue responsable de grandes partes de la aplicación del cálculo a la física matemática. Nacido en Suiza en 1707, fue educado en primer lugar para la vida religiosa, pero pronto se decidió por las matemáticas y comenzó a publicar a la edad de dieciocho años. A los diecinueve ganó un importante premio matemático concedido por la Academia Francesa de Ciencias sobre un problema relacionado con los mástiles de los buques. En 1733, fue nominado para la Academia de San Petersburgo en Rusia. En 1741, se mudó a Berlín, pero regresó a Rusia en 1766 a requerimiento de Catalina la Grande. En consecuencia, Suiza le recuerda como un gran matemático suizo, Rusia, como un gran matemático ruso, y Alemania, como un gran matemático alemán. Su vista comenzó a fallar y en 1766 estaba totalmente ciego. Esto no tuvo efectos notables en su prodigiosa y original producción matemática.

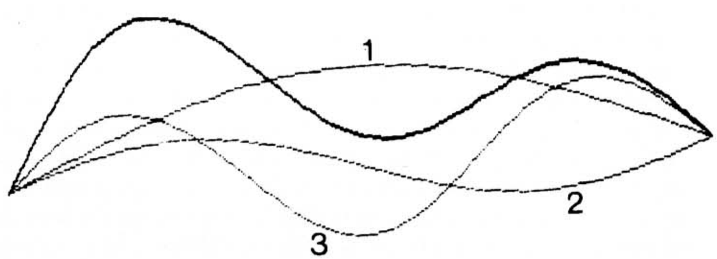
El campo de la mecánica analítica constituyó el primer florecimiento masivo de la semilla newtoniana: la mecánica se basaba total y explícitamente en el cálculo, para el que el objetivo era, primero, hallar las ecuaciones diferenciales que gobernaban el movimiento del sistema de interés, y, luego, resolverlas. Pero pronto comenzaron a abrirse áreas completamente nuevas de la física matemática. Los antiguos pitagóricos buscaban la armonía en los números, o, más exactamente, números en armonía, pues la numerología de la música fue su mayor descubrimiento. Muchos habían manifestado detectar una afinidad entre la matemática y la música. Sea como fuere, se obtuvo una cantidad asombrosa de importantes resultados matemáticos a partir del problema de las vibraciones de una cuerda de violín. Puede argumentarse, por ejemplo, que sin él no dispondríamos ni de la radio ni de la televisión.

Resolviendo una ecuación diferencial apropiada, Brook Taylor descubrió en 1713 que la forma fundamental de una cuerda vibrante es una cuerda sinusoidal (figura 13, 1). En 1746, Jean Le Rond d'Alembert se percató de que también eran posibles otras formas. D'Alembert era el hijo ilegítimo de madame de Tencin, un famoso personaje, y de su amante, el caballero Destouches. El fruto de esta relación fue abandonado en los escalones de la iglesia de Saint Jean-le-Rond de París, de ahí su inusual nombre de pila.

No se puede decir que todos los matemáticos llevaran una vida sosa y ordinaria.

D'Alembert llevó a cabo un análisis general de la cuerda vibrante. Suponiendo que la amplitud de la vibración es pequeña (para eliminar términos indeseables de las ecuaciones, una práctica a la que retornaremos después), escribió una ecuación diferencial que debía ser satisfecha por la cuerda. Pero ésta era un nuevo tipo de ecuación, una *ecuación en derivadas parciales*. En tales ecuaciones aparecen los ritmos de cambio de algunas cantidades con respecto a *diversas* variables diferentes. Para la cuerda de violín, estas variables son la posición de un punto sobre la cuerda y el tiempo. D'Alembert consiguió mostrar que la ecuación es satisfecha por la superposición de dos ondas de forma *arbitraria*, una viajando hacia la izquierda y la otra hacia la derecha.

Euler se apresuró a completar este descubrimiento. Se le ocurrió que la forma ondulada sinusoidal única puede acoplarse con sus armónicos superiores: ondas con la misma forma pero vibrando al doble, triple, cuádruple..., de la frecuencia fundamental (figura 13, 2, 3). Analizó las vibraciones de campanas y tambores en *Una nueva teoría de la música*. Daniel Bernoulli extendió los resultados a los tubos de los órganos.



13. Vibraciones de una cuerda de violín: la sinusoide fundamental (1) y su segundo y tercer armónicos (2, 3) se superponen para crear una forma ondulada más compleja *(línea gruesa)*.

Después de la música vino la física. Joseph-Louis Lagrange, un joven que comenzaba a hacerse con un nombre, aplicó en 1759 estas ideas a las ondas de sonido y al cabo de diez años estaba lista una teoría de la acústica comprensible y lograda.

Viento y ondas

El siglo XVIII fue una época de poderío marítimo, que exigía conocimientos sobre el modo en que fluyen el agua y otros fluidos. En 1752, Euler enfocó su atención a la dinámica de fluidos y en 1755 estableció un sistema de ecuaciones en derivadas parciales para describir el movimiento de un fluido sin viscosidad («pegajosidad»). Consideró fluidos incompresibles (agua) y compresibles (aire). Modeló el fluido como un medio continuo, infinitamente divisible, y describió su movimiento en términos de variables continuas que dependen de la posición de las partículas del fluido: velocidad, densidad, presión.

Una a una fueron cayendo, bajo el dominio de la ley matemática, las diversas ramas de la física, Joseph Fourier desarrolló una ecuación para describir el flujo de calor y obtuvo un método nuevo y potente para resolverla, ahora conocido como *análisis de Fourier*. La idea principal consiste en representar cualquier forma de onda como una superposición de curvas sinusoidales, como en la figura 13, pero más complicada.

La deformación de materiales sometidos a tensión, fundamental para la ingeniería, condujo a las ecuaciones de la elasticidad. Análisis más profundos de la gravitación condujeron a ecuaciones que ahora denominamos en honor de Pierre Simon de Laplace y de Simeon-Denis Poisson. Las mismas ecuaciones aparecían de nuevo en hidrodinámica y electrostática, y se desarrolló una generalización común, conocida como «teoría del potencial». La teoría del potencial permitió a los matemáticos abordar problemas tales como la atracción gravitatoria debida a un elipsoide. Esto es importante en astronomía, puesto que la mayoría de los planetas no son esferas, sino que están achatados en sus polos. El siglo XVIII (y principios del XIX) fue un período en el que se forjaron la mayoría de las grandes teorías de la física matemática clásica, siendo las principales excepciones las ecuaciones de Navier-Stokes del flujo de un fluido viscoso y las ecuaciones del electromagnetismo, debidas a James Clerk Maxwell, que aparecieron un poco después. El descubrimiento de las ondas de radio vino a través de las ecuaciones de Maxwell.

Surgió un paradigma contundente. La forma de modelar la naturaleza es mediante ecuaciones diferenciales.

Abandonado por el análisis

Pero existe un precio a pagar. Los matemáticos del siglo XVIII cayeron de cabeza en un problema que ha plagado la mecánica teórica hasta nuestros días: *obtener* las ecuaciones es una cosa, *resolverlas*, otra diferente. El mismo Euler dijo: «Si no nos está permitido penetrar en un conocimiento completo concerniente a los movimientos de los fluidos, no es debido a la mecánica, o a la insuficiencia de los principios conocidos del movimiento, a los que hemos de atribuir la causa. Es el mismo análisis el que aquí nos abandona». Los principales logros del siglo XVIII consistieron en obtener ecuaciones para modelar los fenómenos físicos. Hubo mucha menos suerte al resolver esas ecuaciones.

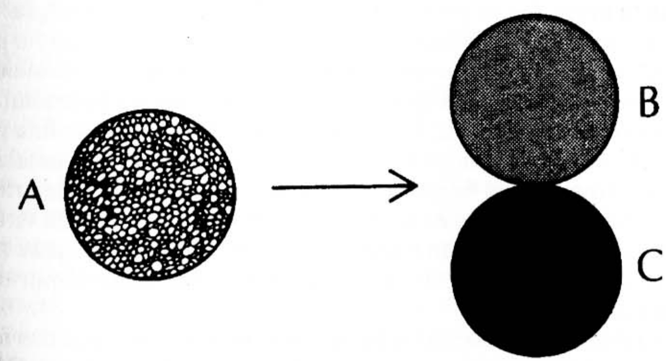
A pesar de esto, había un optimismo ilimitado y un sentimiento general de que los problemas de la naturaleza habían quedado ampliamente resueltos. El éxito del paradigma de la ecuación diferencial fue impresionante y vasto. Muchos problemas, incluyendo los básicos y los importantes, condujeron a ecuaciones que *podían* ser resueltas. Comenzó un proceso de autoselección, por el que las ecuaciones que no podían ser resueltas eran, automáticamente, de menos interés que aquellas que sí podían serlo. Por supuesto, los libros de texto a partir de los cuales las nuevas generaciones aprendían las técnicas sólo contenían los problemas resolubles. Me viene a la mente la observación de Zeeman sobre el mecanismo de Antikitera. Modelos que funcionan como un reloj, creencia en un mundo que funciona como un reloj. Modelos matemáticos deterministas, creencia en un mundo determinista.

Matemática en prenda

El proceso no fue universal. Algunas cuestiones no respondidas, tales como el movimiento de tres cuerpos bajo la gravedad, resultaban notables por su impenetrabilidad. Pero de un modo u otro, tales ecuaciones eran vistas como excepciones, cuando una valoración más honesta debería haberlas presentado como la norma.

Y, de hecho, incluso el determinismo *matemático* de las ecuaciones del movimiento tenía sus fisuras. Una de las idealizaciones comunes de la mecánica newtoniana es considerar partículas elásticas duras. Si colisionan dos de tales partículas, salen rebotadas con ángulos y velocidades bien determinados. Pero las leyes de Newton no son suficientes para determinar el resultado de la colisión simultánea de *tres* de tales partículas (figura 14). Las pretensiones eran magníficas pero lo obtenido era defectuoso, incluso en el apogeo del determinismo laplaciano. Tal como Tim Poston y yo mismo escribimos en *Analog* (noviembre de 1981):

> Así, las «inexorables leyes de la física» sobre las cuales —por ejemplo— trató Marx de modelar sus leyes de la historia, nunca estuvieron ahí realmente. Si Newton no podía predecir el comportamiento de tres



14. ¿A dónde van? De acuerdo con las leyes de Newton del movimiento, y suponiendo que las esferas son perfectamente elásticas, el resultado depende de si A golpea primero a B o a C. Si golpea a ambas exactamente al mismo tiempo, las leyes de Newton no especifican qué sucede.

bolas, ¿podría Marx predecir el de tres personas? Cualquier regularidad en el comportamiento de grandes conjuntos de partículas o personas ha de ser estadística, y esto tiene un matiz filosófico completamente diferente... Podemos ver en retrospectiva que el determinismo de la física precuántica se salvó de la bancarrota ideológica sólo porque evitó el problema de las tres bolas del prestamista.

De todos modos, la matemática pensó que había dado con el filón madre, y estaba ocupada recogiendo todo el oro que podía. Indicar desde las encumbradas alturas del siglo XX que parte de aquello era oro falso es un feo caso de ceguera total.

El período de la reformulación

En 1750, Lagrange recogió las ideas de Euler y, a partir de ellas, elaboró una reformulación elegante y de mucha repercusión de la dinámica. Como resultado de este trabajo cristalizaron dos ideas importantes. Ambas habían estado presentes durante décadas, pero a medio cocinar, hasta que Lagrange las coció, las sacó del horno y las colocó en el mostrador de la panadería para que todos las admiraran, compraran y consumieran.

La primera fue el principio de conservación de la energía. La mecánica clásica reconocía dos formas de energía. La *energía potencial* es la energía que un cuerpo tiene en virtud de su posición. Por ejemplo, en un campo gravitatorio, la energía potencial es proporcional a la altura. Un cuerpo en la cima de una colina posee más energía potencial que uno en un valle, por ello la escalada a una colina es más fatigosa que un paseo a lo largo de una ribera. La *energía cinética* es la energía que tiene un cuerpo en virtud de su velocidad: se ha de trabajar mucho más duramente para frenar un caballo desbocado que cuando se trota sobre él por una pradera.

Durante el movimiento, y en ausencia de fricción, estas dos formas de energía pueden convertirse la una en la otra. Cuando Galileo dejó caer su célebre bala de cañón desde la torre inclinada de Pisa, ésta comenzó con mucha energía potencial pero no cinética, y trocaba energía potencial por cinética conforme caía. Es decir, *descendió* y *se aceleró*. La madre naturaleza es un contable escrupuloso: el balance en su libro de cuentas —la energía total: potencial más cinética— no cambia. Cuando una bala de cañón cae de un parapeto, pierde energía potencial y, por tanto, ha de ganar energía cinética. Es decir, se acelera. La segunda ley de Newton del movimiento expresa efectivamente este argumento cualitativo en una forma cuantitativa precisa.

La segunda idea de Lagrange fue introducir «coordenadas generalizadas». Las coordenadas son un truco para convertir la geometría en álgebra, asociando un conjunto de números con cada punto. Los matemáticos encontraban conveniente trabajar con varios sistemas de coordenadas, dependiendo del problema que estaba siendo abordado. Lagrange debió de decidir que era un inconveniente acarrear este tipo de bagaje de cálculo a cuestas en una teoría matemática. Comenzó suponiendo *un sistema de coordenadas cualesquiera*. Luego, con una simplicidad pasmosa, obtuvo las ecuaciones del movimiento en una forma que *no dependía del sistema de coordenadas* elegido. La formulación de Lagrange posee numerosas ventajas sobre la de Newton. Muchas de ellas son técnicas: son más fáciles de aplicar cuando existen ligaduras en el movimiento y evita las transformaciones de coordenadas engorrosas. Pero, sobre todo, es más general, más abstracta, más elegante y *más simple*.

Estas ideas fueron proseguidas por William Rowan Hamilton (1805-1865), el gran matemático irlandés. Reformuló la dinámica de nuevo, con mayor generalidad todavía. En la versión de Hamilton de la teoría, el estado de un sistema dinámico viene especificado por un conjunto general de coordenadas de posición (similares a las de Lagrange) junto con un conjunto relacionado de coordenadas de momento (las velocidades correspondientes multiplicadas por la masa). Una cantidad única, ahora conocida como *hamiltoniano* del sistema, define la energía total en términos de estas posiciones y momentos. El ritmo de cambio con el tiempo de las coordenadas de posición y de momento se expresa en función del hamiltoniano mediante un sistema de ecuaciones unificado, simple y elegante. Hoy en día los textos avanzados de dinámica *comienzan* frecuentemente con las ecuaciones de Hamilton.

Apuros en el mercado

En el mercado de la física matemática están expuestas ahora las mercancías de los puestos de venta deterministas. La naturaleza obedece a un conjunto relativamente pequeño de leyes fundamentales. Las leyes son ecuaciones diferenciales, y *nosotros conocemos cuáles son*. Dado el estado de un sistema natural en un instante dado, y conociendo las leyes, en principio está determinado unívocamente todo su movimiento futuro. En la práctica, las ecuaciones pueden resolverse en muchos casos. Viento y ondas, campanas y silbatos, el movimiento de la Luna.

Si el propietario del puesto pudiera ver el futuro, se quedaría sorprendido por las maravillas tecnológicas que se obtendrían de sus mercancías. Radio, televisión, electrónica. Automóviles. Teléfonos. Radar. Inmensos aviones. Relojes digitales. Ordenadores. Aspiradoras. Lavavajillas. Equipos personales de música en estéreo. Puentes de suspensión. Sintetizadores. Alas delta. Satélites de comunicación. Discos compactos. Y, para ser imparcial: ametralladoras, tanques, minas antipersona, misiles de crucero, misiles con múltiples cabezas nucleares y polución. No subestimemos el efecto del paradigma determinista clásico de la física matemática sobre nuestra sociedad.

Pero no nos engañemos. La tecnología es nuestra propia creación. En la tecnología ya no nos interesa entender el universo, sino construir pequeños universos de nuestra propiedad, los cuales sean tan simples que les podamos hacer lo que queramos. La tecnología tiene por objeto producir un efecto controlado en unas circunstancias dadas. *Hacemos* nuestras máquinas de modo que se comporten determinísticamente. La tecnología crea sistemas a los que se aplica el paradigma clásico. No importa que no podamos resolver las ecuaciones del movimiento del Sistema Solar: no construimos ninguna máquina cuyo modo de operación dependa de conocer tales respuestas.

El encargado del puesto saca brillo a sus brillantes nuevas ecuaciones, inconsciente de tales asuntos, y sueña con un futuro resplandeciente. Los clientes se congregan a su alrededor, pidiendo a voces, buscando gangas.

¿Pero qué es esto? ¿Otro puesto? No hace falta otro puesto. ¡El ayuntamiento debe de estar loco para permitir a esa pandilla de sucio aspecto que esté en el mercado! Y ¿qué está vendiendo?

¿Dados?

Mirad, si vais a permitir el juego en el mercado, todo el lugar se irá a...

Oh, no están ahí para jugar. ¿Qué otra cosa tenéis en ese puesto?

¿Seguros de vida? ¿La eficacia de la plegaria? ¿Las alturas de los seres humanos? ¿Los tamaños de los cangrejos? ¿Los pétalos de las ranunculáceas? ¿La cantidad de pobres que hay por cada centro de asistencia pública? ¿El porcentaje de divorcios?

Seguidamente se verá en la bola de cristal. El mercado ya se ha estropeado. Supuestamente esto ha de ser un mercado *científico*. ¿Es posible que estas bobadas sean ciencia?

Oh, sí.

3

Las leyes del error

Cuanto más inmensa es la muchedumbre, y mayor la anarquía aparente, más perfecto es su movimiento. Es la ley suprema de la sinrazón. Siempre que se toma un puñado grande de elementos caóticos y se ordenan según su magnitud, se confirma una forma de regularidad insospechada y tremendamente hermosa, que ha estado latente todo el tiempo. Las partes superiores de las filas ordenadas forman una suave curva de proporciones invariables; y cada elemento, conforme se clasifica en su lugar, encuentra su espacio como si le hubiera sido predestinado, adaptado minuciosamente para que encaje.

FRANCIS GALTON, *Natural Inheritance*

A pesar de todos los impresionantes logros alcanzados por la física matemática clásica, permanecieron sin tocar áreas completas del mundo natural. La matemática podía calcular el movimiento de un satélite de Júpiter, pero no el de un copo de nieve en una ventisca. Podía describir el crecimiento de una burbuja de jabón, pero no el de un árbol. Si un hombre saltara desde la torre Eiffel, la matemática podría predecir cuánto tardaría en caer al suelo, pero no por qué, antes de nada, decidió saltar. Y, a pesar de todas las pruebas de que un pequeño número de leyes predicen, «en principio», todo el futuro del universo, en la práctica, conceptos tales como la presión de un gas o la temperatura de un pedazo de carbón ardiendo estaban de modo inimaginable más allá de las fronteras de lo que con rigor podía deducirse a partir de las leyes que eran realmente conocidas.

Los matemáticos habían logrado finalmente concretar, al menos, algo del orden en el universo y las razones de ese orden, pero todavía vivían en un mundo desordenado. Creían, con cierta justificación, que gran parte del desorden obedecía a las mismas leyes fundamentales; su incapacidad para aplicar aquellas leyes a cualquier efecto era simplemente una cuestión de complejidad. El movimiento de dos masas puntuales sometidas a fuerzas mutuas podía calcularse de forma precisa. El caso de tres partículas ya era demasiado difícil para una solución completa, si bien en casos específicos se podía resolver por métodos aproximados. El movimiento a largo plazo de los aproximadamente cincuenta cuerpos mayores del Sistema Solar era imposible de controlar en su totalidad, pero haciendo un esfuerzo de cómputo suficientemente grande se podía entender razonablemente bien cualquier característica específica. Pero un miligramo de gas contiene unos cien trillones de partículas. Incluso para escribir las ecuaciones del movimiento se necesitaría un pedazo de papel comparable en tamaño al área cubierta por la órbita de la Luna. Resulta ridículo pensar seriamente en resolverlas.

Un método que en teoría resuelve todo, pero que en la práctica es de tanto uso como una tela de araña contra un alud, no predispone a ganar muchos de votos, no importa cuán impecables puedan ser sus credenciales filosóficas. La ciencia no iba a abandonar sin esperanza el problema del gas sólo porque era imposible describir los movimientos individuales de cada partícula aislada. La complejidad detallada de grandes números de partículas puede ser inimaginable; pero si se plantean unos objetivos más realistas todavía se puede conseguir algún progreso. El experimento sugiere que, a pesar de su complejidad, los gases se comportan de una forma bastante regular. Si el comportamiento detallado de los grandes sistemas es inabordable, ¿podemos encontrar regularidades en el comportamiento global y promedio? La respuesta es «sí», y la matemática que hace falta es la teoría de la probabilidad y su pariente aplicada, la estadística.

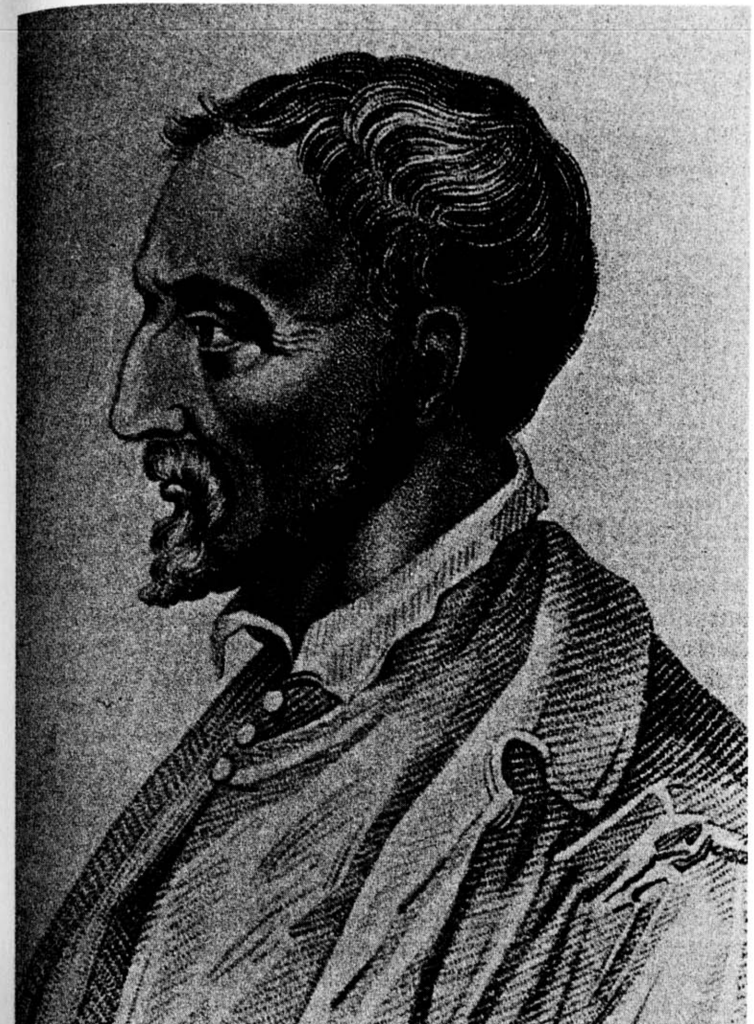
Ganancias del juego

La teoría de la probabilidad se originó con un tema sumamente práctico, el juego. Todo jugador tiene un sentido instintivo de las «probabilidades» en una apuesta. Los jugadores *saben* que hay estructuras regulares sobre las que apostar, aunque no todas sus apreciadas creencias sobreviven al análisis matemático. Girolamo Cardano (figura 15), el erudito del juego, un genio intelectual y un pícaro incorregible, fue el primero en escribir sobre la probabilidad. En 1654, el caballero de Meré le preguntó a Blaise Pascal cómo repartir mejor las apuestas en un juego de azar cuando se interrumpe. Los mismos nombres que afloran en el desarrollo de la matemática determinista también aparecen en el de la matemática del azar: Pascal escribió a Fermat y entre ambos encontraron una respuesta. Ésta se imprimió en 1657 en el primer libro que se dedicó íntegramente a la teoría de la probabilidad, *De ratiociniis in ludo aleae* de Christian Huygens.

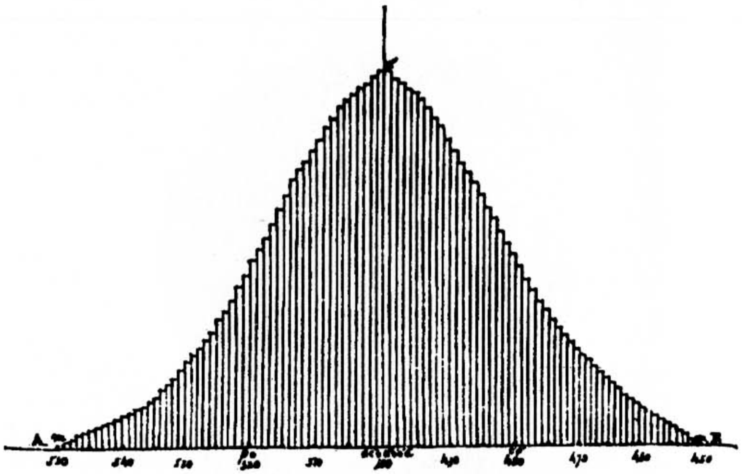
La probabilidad, como materia con derecho propio, proviene de la publicación de la obra *Teoría analítica de las probabilidades* de Laplace, en 1812. De acuerdo con Laplace, la probabilidad de un suceso es el número de maneras en que puede ocurrir dividido por el número total de cosas que pueden suceder, sobre el supuesto de que todas estas últimas son igualmente probables. Por ejemplo, la probabilidad de que una familia de siete miembros conste totalmente de chicas es de 1/128, debido a que de las 128 secuencias hombre/mujer posibles, una es exactamente MMMMMMM. (Lo anterior supone que son igualmente probables un chico o una chica; de hecho, los chicos son ligeramente más probables. No costaría demasiado tomar esto en consideración.)

El hombre promedio

El arma práctica de la teoría de la probabilidad es la estadística. La característica más notable en el desarrollo de la estadística es que ambas ciencias, la «dura» y la «blanda», tuvieron papeles decisivos, y que entre ellas se transfirieron repetidamente importantes ideas y métodos. En las pocas páginas que siguen nos concentraremos en un ejemplo típico. Gran parte de la estadística se centra alrededor de la llamada *distribución normal* (figura 16). Ésta es una curva en forma de campana que modela fielmente las proporciones de una población que tiene alguna característica particular. Por ejemplo, si se toman 1.000 hombres al azar de entre la población



15. Girolamo Cardano, el erudito del juego (reproducido con permiso de John Wiley & Sons Ltd.).



16. Aproximación binomial a una distribución normal (Quetelet, 1846).

de Mongolia Exterior y se dibuja una gráfica que muestre cuántos de ellos tienen una determinada altura en centímetros, ésta se asemejará exactamente a la curva acampanada de la distribución normal. Lo mismo sucede si se representa la envergadura de las alas de una población de patos, la habilidad de una población de topos para cavar madrigueras, los tamaños de los dientes de los tiburones o el número de lunares de los leopardos.

La distribución normal fue denominada originalmente la *ley del error*, debido al trabajo de los astrónomos y matemáticos del siglo XVIII, quienes, cuando trataron de calcular las órbitas de los cuerpos celestes, se vieron forzados a tomar en cuenta el efecto del error observacional. La ley del error describe cómo se aglomeran los valores observados alrededor de su valor promedio, y proporciona estimaciones sobre las posibilidades de que ocurra un error de un valor determinado. Adolphe Quetelet (figura 17) la importó a la ciencia social, y aplicó el método a todo lo que se le ocurrió: medidas del cuerpo humano, delitos, matrimonios, suicidios. Su *Mecánica social* se tituló así por un deliberado paralelismo con la obra *Mecánica celeste* de Laplace. Quetelet fue lo suficientemente hábil

17. Adolphe Quetelet (retrato de J. Odevaere, 1822).

para extraer conclusiones generales de la supuesta constancia de los valores promedio de las variables sociales, y sugirió la tentadora noción del «hombre promedio». No sólo pensaba Quetelet en la condición humana como una especie de dinámica social: quería ocuparse de ella a la manera de un ingeniero de control. Ajustando, estabilizando, amortiguando las oscilaciones. Para Quetelet, el «hombre promedio» no era exactamente una abstracción matemática, sino un ideal moral.

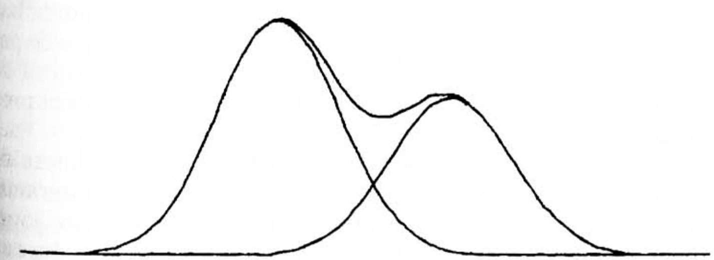
Genio hereditario

Las ciencias sociales difieren de las ciencias físicas en muchos aspectos, uno de los cuales es que los experimentos controlados son raramente realizables en las ciencias sociales. Si un físico desea examinar el efecto del calor en una barra de metal, puede calentarla a varias temperaturas y comparar los resultados. Si un economista desea examinar el efecto de una política fiscal en la economía de un país, puede aplicarla o no; pero no puede permitirse el lujo de intentar aplicar diferentes regímenes fiscales a la *misma* economía bajo las mismas condiciones. Alrededor de 1880, las ciencias sociales comenzaron a desarrollar un sustituto del experimento controlado, derivado de los primeros trabajos de Quetelet. El trabajo más importante fue realizado por tres hombres: Francis Galton, Ysidro Edgeworth y Karl Pearson. Cada uno de ellos destacaba en un campo tradicional de conocimientos: Galton, en antropología; Edgeworth, en economía, y Pearson, en filosofía. Entre ellos convirtieron la estadística de una ideología polémica en una ciencia más o menos exacta. Seguiremos con algo de detalle sólo la carrera de Galton.

Francis Galton (1822-1911) estudió medicina, pero la abandonó cuando heredó una fortuna y se dispuso a ver mundo. En 1860 dedicó su atención a la meteorología, y, por medio de métodos gráficos, dedujo la existencia de anticiclones a partir de un montón de datos irregulares. Tocó temas tales como la psicología, la educación, la sociología y el estudio de las huellas digitales; en 1865 surge su principal foco de interés: la herencia genética. Galton deseaba entender cómo pasaban a las generaciones sucesivas las características

heredadas. En 1863 se encontró con los escritos de Quetelet y al instante quedó cautivado por la ubicuidad de la distribución normal. Sin embargo, el modo en que la empleó era bastante diferente de como propugnaba Quetelet. Galton consideró la distribución normal no como un imperativo moral, sino como un método para clasificar datos en grupos de origen diferente. Por ejemplo, considérese una población mezcla de pigmeos y de gigantes. Las alturas de los pigmeos se ajustan a una distribución normal y lo mismo sucede con las alturas de los gigantes. Ahora bien, estas dos curvas son bastante diferentes; en particular, sus picos estarán en lugares distintos. Las alturas de la población *combinada* posiblemente no pueden formar una distribución normal, por la razón matemática de que la superposición de dos distribuciones normales independientes no da lugar, en general, a otra distribución normal. En lugar de ello, se obtiene una curva con dos picos (figura 18). Galton razonó que la distribución normal se aplica únicamente a poblaciones «puras»; que fallaría en las mezclas de poblaciones; y que las poblaciones mezcladas podrían separarse en sus constituyentes puros analizando el modo en que fallaba. Un pico para los gigantes, otro para los pigmeos.

Pero esta misma imagen causaba considerables dolores de cabeza a Galton cuando pensaba en la herencia genética. Supongamos que la primera generación de una población pura tiene sus alturas distribuidas normalmente. Cada individuo tiene descendientes, cuyas alturas, presumiblemente, también están distribuidas normalmen-



18. La superposición de dos distribuciones normales puede producir una curva con dos picos.

te. Sin embargo, el pico en la altura de los descendientes depende de cuál fuese el pico en la de los progenitores; de lo contrario, ¿cómo podría heredarse la «altura» característica? De esta forma, las alturas de las sucesivas generaciones se describen por la superposición de muchas distribuciones normales diferentes. Pero la superposición de distribuciones normales, como acabamos de ver, no conduce en general a una distribución normal. Conclusión: *cuando una población pura produce la siguiente generación, la población resultante ya deja de ser pura.* Pero esto es absurdo: ¡después de todo, la población «pura» original es, a su vez, una generación resultante de la generación previa!

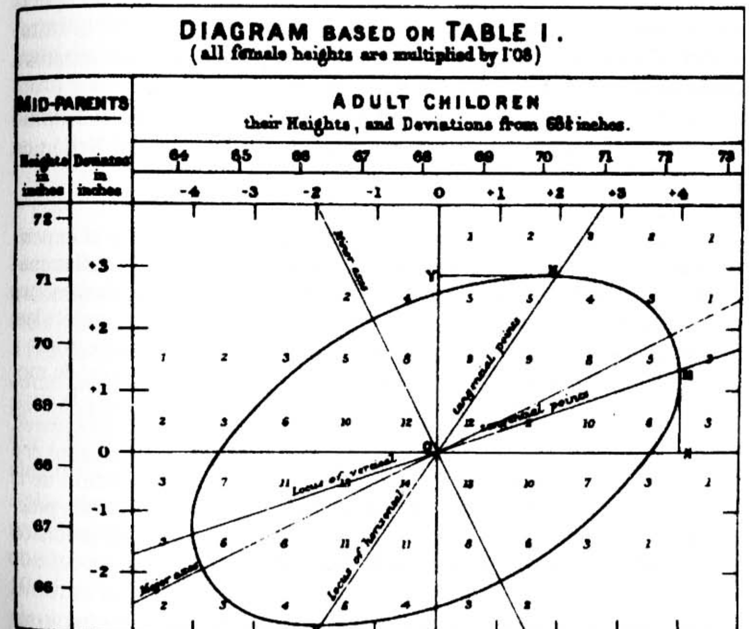
En 1877, Galton consiguió resolver la paradoja. Para entonces tenía numerosos datos referentes a guisantes dulces, los cuales mostraban, de hecho, que las sucesivas generaciones se *ajustaban* a la distribución normal; y también tenía un curioso instrumento experimental conocido como *tresbolillo*, que simulaba la matemática dejando caer perdigones de plomo a través de una disposición ordenada de alfileres metálicos, rebotando al azar a la izquierda o a la derecha. Su resolución de la paradoja fue la siguiente. Puesto que los padres proceden de una población pura, las distribuciones normales por separado correspondientes a sus descendientes *no son independientes*. Su comportamiento superpuesto es, pues, especial. De hecho, tiene lugar un pequeño milagro matemático: las distribuciones están relacionadas justo de tal manera que al superponerlas todas, resulta de nuevo una distribución normal.

Galton quedó impresionado por la fragilidad de tal resultado y ello le condujo a la idea de *regresión*. Los niños de padres altos son, por promedio, más bajos que éstos; los niños de padres bajos son, por promedio, más altos. Esto no impide que los niños de padres altos sean más altos que los de los bajos, pero la altura de los descendientes está, así, desplazada ligeramente hacia el promedio.

En 1855, Galton dibujó un diagrama que mostraba la altura de 928 jóvenes frente a la de sus padres (figura 19). En el diagrama, los números en una fila y una columna dadas indican cuántos jóvenes de la muestra analizada poseen padres con la altura media que aparece en el extremo izquierdo de esa fila y cuya propia altura difiere de la de sus padres en la cantidad que encabeza la columna.

Galton se percató de que los números en un rango dado, digamos de 3 a 5 o de 6 a 8, se autodisponen aproximadamente a lo largo de elipses, que están centradas en la altura promedio de la población completa. Esta imagen conformaba perfectamente la teoría de la regresión de Galton, y, a partir de ella, emergió el método del *análisis de regresión*, que permite deducir las tendencias subyacentes a partir de datos aleatorios.

Galton no expuso sus ideas en términos matemáticos precisos, prefiriendo basarse en descripciones gráficas y demostraciones con su tresbolillo. La solidez matemática fue aportada por Edgeworth, que extendió las ideas y las hizo mucho más ampliamente aplica-



19. Diagrama ideado por Francis Galton para obtener la relación de las alturas de los niños con respecto a las de sus padres, en donde se observa una pauta de elipses concéntricas.

bles. Pearson, un matemático competente, pero menos dotado de talento matemático que Edgeworth, fue un divulgador con el empuje y la ambición necesarios para vender al mundo dichos métodos. Visionario, técnico y vendedor: fueron necesarios los tres para que la estadística se afianzara.

Transferencia de tecnología

La estadística, como ya se ha observado, es destacable por el modo en que sus ideas fluyen y refluyen entre las ciencias físicas y sociales. Partiendo del análisis de errores en astronomía, los sociólogos desarrollaron herramientas matemáticas para el reconocimiento de pautas en datos aleatorios. Pero después, las ciencias duras recuperaron dichas herramientas, con un propósito muy diferente: el tratamiento matemático de sistemas físicos tan complejos que parecían aleatorios.

En 1873, el gran físico James Clerk Maxwell propuso el empleo de los métodos estadísticos en una reunión de la Sociedad Británica para el Avance de la Ciencia:

> La más ínfima porción de materia que podemos someter al experimento está constituida por millones de moléculas, ninguna de las cuales se nos muestra jamás en su identidad individual. No podemos, por tanto, determinar el movimiento real de ninguna de dichas moléculas; por ello, estamos obligados a abandonar el método histórico estricto y a adoptar el método estadístico para tratar con grandes grupos de moléculas. Los datos del método estadístico, tal como se aplican a la ciencia de las moléculas, son las sumas de grandes cantidades moleculares. Al estudiar las relaciones entre cantidades de este tipo, nos hallamos con una nueva clase de regularidad, la regularidad de los promedios, de la que podemos fiarnos suficientemente para todos los propósitos prácticos, pero de la que no podemos pretender ese carácter de precisión absoluta que poseen las leyes de la dinámica abstracta.

Los físicos citaron repetidamente el éxito de los métodos estadísticos en las ciencias sociales como justificación para sus procedimientos probabilísticos. En sus manos, floreció el método estadístico, y la teoría cinética de los gases se convirtió en un área

importante —y fundamental— de la actividad científica. Y esto no fue el fruto de una vaga analogía entre moléculas e individuos en una población: había estrechas correspondencias matemáticas. En particular, Maxwell abordó una cuestión básica: ¿cuál es la distribución estadística de la velocidad, aleatoriamente variable, de una molécula? Comenzó con dos suposiciones físicas plausibles:

- La componente de la velocidad en cualquier dirección dada es independiente de la componente en cualquier dirección perpendicular.
- La distribución es esféricamente simétrica, es decir, trata a todas las direcciones por igual.

A partir de estos principios abstractos únicamente, sin recurrir a las leyes de la dinámica, Maxwell presentó un argumento matemático único para demostrar que la distribución ha de ser el análogo tridimensional de la ley del error de Quetelet.

Caos holandés

La palabra «gas» fue inventada por el químico holandés J. B. van Helmont en su obra *Ortus medicinae*, en 1632, con una similitud deliberada hacia la palabra griega «caos». Fue una elección muy perspicaz.

En la física de los gases, la aleatoriedad y el determinismo se encuentran por primera vez cara a cara. Pero, en principio, un gas es un agregado puramente determinista de partículas en movimiento que obedecen a leyes dinámicas precisas. ¿De dónde proviene la aleatoriedad?

La respuesta que cualquier científico que merezca el pan que se come hubiese dado automáticamente hasta la década de 1970, y que la mayoría todavía hubiese dado a principios de la década de 1980, es la *complejidad*. El movimiento detallado de un gas es simplemente demasiado complejo para que lo comprendamos.

Supóngase que se posee un aparato capaz de seguir la pista de un número razonable de moléculas individuales de gas conforme se mueven. No existe tal aparato, e incluso, si lo hubiera, se necesitaría usar un ordenador para ralentizar el movimiento en muchos órdenes de magnitud para poder observar lo que está sucediendo; pero supongámoslo. ¿Qué se vería? Concentremos nuestra atención en un pequeño grupo de moléculas. Éstas siguen trayectorias rectilíneas durante un corto intervalo de tiempo, y luego comienzan a rebotar unas contra otras de un modo que se puede predecir a partir de la geometría previa de los caminos seguidos. Pero justamente cuando estamos empezando a ver la pauta del movimiento, una nueva molécula viene zumbando desde fuera y se estrella contra nuestro grupo perfectamente organizado, rompiendo la pauta. Y, antes de que podamos obtener una nueva pauta, viene otra molécula, y otra, y otra...

Si todo lo que vemos es una pequeña parte de un movimiento enormemente complicado, ésta *parecerá* aleatoria, *parecerá* no tener estructura.

En cierto modo, éste es el mismo mecanismo que hace tan difíciles las ciencias sociales. No se puede estudiar una economía viviente, o una nación, o una mente, aislando una pequeña parte. Nuestro subsistema experimental se verá constantemente perturbado por influencias externas inesperadas e incontrolables. Incluso en las ciencias físicas, la mayoría del esfuerzo diario en el método experimental se dedica a la eliminación de las influencias externas. Los destelleantes anuncios de neón de Broadway son efectivos para atraer la vida nocturna y el hampa a los clubes de *strip tease* y a los bares, pero causan estragos en el telescopio del astrónomo. Un sismómetro preciso no sólo registrará terremotos, sino también los pasos de la camarera que sirve el té empujando su carrito por el pasillo. Los físicos toman medidas extremas para eliminar tales efectos indeseados. Sitúan los telescopios en la cima de las montañas, en lugar de hacerlo sobre los tejados de Manhattan, e instalan los detectores de neutrinos kilómetros bajo tierra, en lugar de ponerlos en el despacho. Pero el sociólogo, privado incluso de este lujo, debe usar métodos estadísticos para modelar, o filtrar, estos efectos externos. La estadística es un método para cribar el precioso orden de entre la arena de la complejidad.

Los científicos de hace cien años sabían bien que un sistema determinista puede comportarse de un modo aparentemente aleatorio. Pero sabían que no era *realmente* aleatorio; sólo lo *aparentaba* debido a una información imperfecta. Y también sabían que esta falsa aleatoriedad sólo ocurría en sistemas muy grandes y complicados: sistemas con muchísimos grados de libertad, muchísimas variables distintas, muchísimas partes constituyentes. Sistemas cuyo comportamiento detallado estaría siempre más allá de la capacidad de la mente humana.

¿Sobra un paradigma?

Al final del siglo XIX la ciencia había adquirido dos paradigmas muy diferentes para los modelos matemáticos. El primero, y más antiguo, era el análisis de gran precisión por medio de las ecuaciones diferenciales; en principio, era capaz de determinar la evolución completa del universo, pero, en la práctica, sólo era aplicable a problemas simples y bien estructurados. El segundo, una tosca y presuntuosa criatura, era el análisis estadístico de cantidades promediadas, que trabajaba con cantidades globales del movimiento de sistemas altamente complejos.

No había prácticamente contacto alguno, a nivel matemático, entre ambos métodos. Las leyes estadísticas no se calculaban como consecuencias matemáticas de las leyes de la dinámica: eran una capa extra de estructura impuesta sobre los modelos matemáticos empleados en física, y se basaban en la intuición física. La deducción rigurosa del comportamiento de la materia en bloque a partir de las leyes de la dinámica resulta, incluso hoy en día, un problema desafiante para los físicos matemáticos: sólo recientemente alguno se ha aproximado a la demostración de que (en un modelo apropiado) existen los gases. Los cristales, los líquidos y los sólidos amorfos se mantienen con firmeza fuera de nuestro alcance.

A medida que fue transcurriendo el siglo XX, la metodología estadística fue ocupando su lugar al lado del modelo determinista, tratándose de tú a tú. Se acuñó una palabra nueva para reflejar que incluso el azar tenía sus propias leyes: *estocástico*. (La palabra griega *stochastikos* significa «de buena puntería» y de este modo expresa la idea de *usar* las leyes del azar para el beneficio personal.) La matemática de los procesos estocásticos —secuencias de sucesos determinadas por la influencia del azar— floreció junto con la matemática de los procesos deterministas.

El orden ya no fue nunca más sinónimo de ley y el desorden de fuera de la ley. Ambos, el orden y el desorden, tenían leyes. Pero estas leyes eran dos códigos distintos de comportamiento. Una ley para lo ordenado, otra para lo desordenado. Dos paradigmas, dos teorías. Dos formas de ver el mundo. Dos ideologías matemáticas, cada una de aplicación únicamente dentro de su propia esfera de influencia. El determinismo para los sistemas simples con pocos grados de libertad, la estadística para los sistemas complicados con muchos grados de libertad. Cualquier sistema, o bien era aleatorio o no lo era. Si lo era, los científicos usaban algún método estocástico; si no, preparaban sus ecuaciones deterministas.

Los dos paradigmas eran compañeros por igual, igualmente aceptados en el mundo científico, igualmente útiles, igualmente importantes, igualmente matemáticos. Iguales. Pero diferentes. Totalmente, irreconciliablemente diferentes. Los científicos *sabían* que eran diferentes, y sabían por qué: los sistemas simples se comportan de modo simple, los sistemas complicados se comportan de modo complicado. Entre la simplicidad y la complejidad no puede haber un terreno común.

Pero lo que *conoce* una generación de científicos, más allá de cualquier sombra de duda, con un conocimiento elaborado sobre la propia estructura de su mundo, es precisamente lo que la siguiente generación desafiará y derrumbará. Cuando algo se *sabe* con tanta firmeza, uno no lo cuestiona. Si no se cuestiona, se esta viviendo a base de fe, no a base de ciencia.

Pero ésta es una cuestión muy difícil. ¿Puede un sistema determinista simple comportarse como uno aleatorio? Incluso el preguntarlo iba contra la intuición de casi todo el mundo. El progreso completo de la ciencia estaba basado en la creencia de que la forma de buscar la simplicidad en la naturaleza es hallando ecuaciones diferenciales para describirla. ¡Qué pregunta más tonta!

En el momento de la historia al cual acabamos de llegar, sólo se podía distinguir una voz disidente, y de forma débil e incierta; era simplemente una indicación temblorosa de problemas futuros; dicha voz se elevó una sola vez, después calló; una voz que —si se

escuchó— fue ignorada. Era la voz de un hombre que, presumiblemente, fue el matemático más grande de su época, otro revolucionario de la turbulenta ciencia de la dinámica; un hombre que creó un campo completamente nuevo de la matemática como un simple subproducto. La voz de un hombre que tocó el caos...

Y se horrorizó por ello.