Cuaderno de Materiales
Nº23, 2011, 557-574
ISSN: 1139-4382

La polémica intuicionismo-formalismo en los años 20. Principio de Tercio Excluso

Ferrán Mir Sabaté

El debate sobre Fundamentos

Las Matemáticas difieren de las demás ciencias en que todas sus proposiciones deben ser demostradas. Cuál deba ser el contenido o la extensión de estas demostraciones es discutible, pero todos los matemáticos estarán de acuerdo en decir que el objetivo de la matemática es la demostración. Las únicas vías para cuestionar una demostración son 1) discutir las presunciones sobre las que se basa o 2) discutir la validez de las inferencias que contiene. Si, después de reflexionar sobre ello, se aceptan las presunciones y las inferencias, debemos aceptar la demostración y afirmar que su conclusión es una verdad matemática, un teorema. La mayoría de las demostraciones matemáticas tienen como presunciones otros teoremas ya demostrados con anterioridad; pero si insistimos en discutir las presunciones, llegaremos hasta determinados conceptos que simplemente se aceptan como verdaderos sin otra demostración.

Ello significa que, las matemáticas precisan de unos fundamentos: unas presunciones últimas (aserciones no demostradas y conceptos no definidos) sobre los que se edifican todas las demostraciones y conceptos matemáticos. El problema es, pues, si puede encontrarse un reducido número de conceptos básicos claros y de primeros principios verdaderos, sobre los que desarrollar de forma sistemática todas las matemáticas.

Las matemáticas, históricamente, estaban basadas en unas cuantas intuiciones geométricas y numéricas que podían ser imaginadas, pero no podían ser rigurosamente definidas (el proceso de contar o los postulados de Euclides [Ver 20 Snapper Pág. 553]. Durante el siglo XIX, los matemáticos, no sólo fueron exigiendo un mayor rigor en las definiciones, sino que, además, empezaron a desarrollar nuevos sistemas basados en principios que podían llegar a ser muy distintos a las intuiciones aceptadas desde los griegos: geometrías no euclídeas, teoría sobre los números reales, conceptos de cuerpo, anillo, grupo, etc. Paradójicamente, al separarse de estas intuiciones primitivas, los matemáticos se dieron cuenta de que sus nuevas teorías, más abstractas, podían ser aplicadas a un mayor número de campos.

La Teoría de Conjuntos

A partir de 1874, Georg Cantor (1845-1918) inició la exposición de la Teoría de Conjuntos. Su punto de partida eran las colecciones de objetos; y rápidamente, aunque no sin resistencias, se convirtió en el candidato ideal para ser usado como fundamento de la Matemática [Ver 30 Weil Pág. 2]. Con el decidido apoyo de Richard Dedekind (1831-1916) y Karl Weierstrass (1815-1897) y el firme rechazo por parte de Leopold Kronecker (1823-1891) [Ver 6 Giaquinto Pág. 120], Cantor siguió con la publicación de sus artículos en el Journal de Crelle y en Mathematische Annalen, hasta que, finalmente, entre 1895 y 1897, publicó su tratado en dos volúmenes de Teoría de Conjuntos, en el que sistematizaba todas las ideas expuestas en sus anteriores artículos.

Las ideas básicas que Cantor exponía por primera vez son hoy familiares, pero en ese momento fueron realmente revolucionarias: la existencia de diferentes clases de infinito, las propiedades de los buenos órdenes, los ordinales y los cardinales, las operaciones con números transfinitos, etc. Como ya había defendido en sus anteriores artículos, Cantor afirmaba que las matemáticas son muy libres [Ver 8 Grattan Pág. 120] y que las únicas condiciones que deben exigirse para la incorporación de un nuevo concepto matemático, son 1) que no sea contradictorio y 2) que se defina en función de los conceptos previamente aceptados.

Las Paradojas

No obstante, no tardaron en surgir los primeros resultados paradójicos a partir de los principios de Cantor. La primera paradoja fue planteada en 1897 por Cesare Burali-Forti (1861-1931), aunque parece ser que Cantor ya era consciente de ella: si el conjunto de todos los ordinales es también un ordinal, ello conduce a una contradicción. En 1899, el propio Cantor descubrió una nueva paradoja: ¿cuál es el cardinal del conjunto de todos los conjuntos? Pero la paradoja que tuvo un efecto más devastador fue la planteada por Bertrand Russell (1872-1970) en 1902: Si A es el conjunto de los conjuntos que no son miembros de sí mismos, ¿A pertenece o no pertenece a A?. Cualquiera de ambas respuestas conduce a una contradicción.

Era indispensable, pues, establecer una teoría libre de contradicciones. Dicho trabajo fue acometido por Ernst Zermelo (1871-1953), quien publicó en 1908 una primera axiomatización de la Teoría de Conjuntos que, en sus elementos básicos, se ha mantenido a lo largo del tiempo incluyendo las posteriores aportaciones a principios de los años 20's de Abraham Fraenkel (1891-1965) y de Thoralf Skolem (1187-1963) y que hoy conocemos como sistema ZFC (Zermelo-Fraenkel-Choice). No obstante, durante los primeros años del siglo XX, coexistieron diferentes visiones de las matemáticas y cada una de ellas implicaba distintos métodos lógicos. La lógica matemática había iniciado su desarrollo con las obras de Gottlob Frege (1848-1925), pero todavía no era una disciplina plenamente establecida. Su desarrollo, en paralelo con la teoría de conjuntos, permitió empezar a hablar de metamatemática, es decir, de la reflexión matemática sobre el contenido de la matemática.

Los programas de superación de las paradojas

Las polémicas sobre la teoría de conjuntos y los métodos lógicos abrieron distintas vías de investigación para garantizar la consistencia de los fundamentos buscando la simplicidad, la claridad, la brevedad y la unidad de los mismos. La necesidad de la consistencia era evidente para todos: no se podía construir un sistema de conceptos fundamentales que condujese a contradicciones. Las demás características pretendían conseguir la más amplia aquiescencia. En definitiva, su justificación debía ser por persuasión y no por demostración.

De esta forma confluyen Teoría de Conjuntos y Lógica Matemática. La primera establece los fundamentos, los conceptos primitivos sobre los que desarrollar la totalidad de la matemática y la segunda para garantizar la validez del método deductivo. Las diferentes vías de investigación mezclarán diferentes posiciones sobre ambas. Estas vías pueden agruparse en cuatro tendencias: logicismo, formalismo, constructivismo e intuicionismo.

Logicismo

El inicio de la lógica matemática se debe casi totalmente a Frege. Con la publicación de su libro *Begriffsschrift* (*Conceptografía*) en 1879 dio un avance sustancial a la lógica, que había permanecido casi inalterada desde Aristóteles. En él desarrollaba un lenguaje universal, la lógica simbólica, para eliminar toda posibilidad de malentendido, propio del lenguaje natural, siguiendo la idea original de Leibniz. A pesar de que la notación actual no sigue la propuesta por Frege, las ideas fundamentales por él establecidas siguen siendo comúnmente utilizadas. Frege quería basar toda la matemática en la pura lógica. En su siguiente libro relevante, *Die Grundlagen der Arithmetik* (*Los Fundamentos de la Aritmética*) (1884), se pregunta sobre qué cosa son los números y cuál es la naturaleza de la verdad aritmética, descubriendo los errores lógicos que habían existido hasta ese momento en la definición de número. En 1893 inicia un vasto proyecto al publicar el primer volumen de *Die Grundgesetze der Arithmetik* (*Las leyes básicas de la aritmética*), obra concebida para publicarse en tres volúmenes, pero que se interrumpió en 1902, cuando ya estaba en imprenta el segundo volumen, al recibir una carta de Russell en la que le explicaba que sus axiomas eran inconsistentes, dando lugar a la ya mencionada paradoja de Russell. Frege sólo pudo incluir un apéndice en el que modificaba sus axiomas, invalidando muchas de las demostraciones del primer volumen y reconociendo que no hay nada más indeseable para un científico que ver rechazados sus principios cuando tiene su obra finalizada.

No obstante, el programa logicista (llamado así por su pretensión de considerar toda la matemática reducible a la lógica) fue continuado por el propio Russell, quien, conjuntamente con Alfred North Whitehead (1861-1947) publicó sus *Principia Mathematica* en tres volúmenes (1910, 1912, 1913). Para sortear la paradoja, Russell y Whitehead eligen la teoría (simple o ramificada) de los tipos creando una jerarquía acumulativa, en cuya base se encuentran los individuos, en el segundo nivel los conjuntos, en el tercero los conjuntos de conjuntos, etc. Mediante este artilugio pueden establecerse predicados que se cumplan (que definan conjuntos), pero sólo para objetos dentro de un mismo nivel jerárquico, evitando así las contradicciones. En definitiva, lo que hacen Russell y Whitehead es definir lógicamente los números como clases de clases y, de esta manera, pueden reducir todas las proposiciones numéricas a cuantificadores e identidad.

Formalismo

La conocida intervención de David Hilbert (1862-1943) en el Congreso Internacional de París de 1900, en la que planteó los 23 problemas matemáticos a resolver durante el siglo XX, iba mucho más allá de la mera relación de dichos problemas. La convicción claramente expresada por Hilbert de que todo problema ha de tener su solución basada en la pura razón [Ver 6 Giaquinto Pág. 125 y ss.]: "En las matemáticas no existe el ignorabimus". Un año antes, Hilbert había publicado su *Grundlagen der Geometrie*, en el que establecía los axiomas a partir de los cuales podía desarrollarse, mediante pura deducción, toda la disciplina en todas sus variantes, tanto euclídeas como no euclídeas. Mediante este ideal axiomático podía construir un raciocinio sobre objetos que no necesitaba definir; al contrario de Euclides que había precisado de una definición (intuitiva) de los objetos básicos (punto, línea, plano, etc.). El hecho de prescindir de las definiciones de los objetos básicos, hace que se le haya reprochado la reducción de las matemáticas al estudio de las simples relaciones entre objetos abstractos: un puro juego con símbolos. La combinación del ideal axiomático con la convicción de que todo problema debe tener solución, conducirá en los años sucesivos a la idea de completud del sistema axiomático. En los primeros años del siglo XX, esta idea es todavía vaga [Ver 13 Mancosu Pág. 151], pero está claro que Hilbert considera que desde un reducido grupo de axiomas pueden derivarse la totalidad de los teoremas aceptados en las matemáticas ordinarias. También está presente la idea de simplicidad: el conjunto de axiomas ha de ser lo más reducido posible y deben ser independientes unos de otros.

En los inicios del siglo XX, Hilbert establecerá de forma clara estas ideas, al mismo tiempo que empieza preocuparse por el problema de la consistencia de los axiomas y de su demostración. En 1908, Zermelo publica su primera axiomatización de la Teoría de Conjuntos que, aunque no consigue demostrar su consistencia, representa un gran paso en la dirección sugerida por Hilbert, superando mediante ella las paradojas conocidas. No obstante, Zermelo utiliza el "axioma de elección", presentado en un escrito suyo de 1904, que daba momentánea respuesta al segundo de los problemas de la famosa lista de Hilbert de 1900 y que será muy cuestionado.

A pesar de que Hilbert fue fascinado inicialmente por los *Principia Mathematica*, se reafirmó posteriormente en la idea del desarrollo simultáneo de la lógica y de las matemáticas (es decir, la lógica también debía axiomatizarse), en contra de lo defendido por Russell de que la matemática se construía a partir de la lógica. De la mano de Hilbert, la Universidad de Gotinga, se convertirá durante los años 20's en el centro del desarrollo de la lógica matemática. La nómina de sus discípulos y colaboradores incluirá, entre otros, a Wilhem Ackermann (1896-1962), Paul Bernays (1888-1977), George Polya (1887-1985), Richard Courant (1888-1972), John von Neumann (1903-1957), etc.

Constructivismo

El máximo exponente del constructivismo es el matemático Leopold Kronecker[1] quien, a pesar de haber muerto en el siglo XIX, seguirá manteniendo una notable influencia en los periodos posteriores. Dos son las tesis fundamentales del constructivismo de Kronecker: la posibilidad de aritmetización estricta de toda la matemática y la no admisión de definiciones que no permitan decidir lo definido. Esta segunda tesis le había llevado a rechazar, no solo la teoría de conjuntos de Cantor, sino también la caracterización del análisis de Weierstrass y la teoría de los números de Dedekind ya que en ninguno de ambos casos existe un procedimiento para decidir si un número, construido mediante un conjunto infinito, es o no es

1 Ya se ha mencionado anteriormente su firme oposición a al Teoría de Conjuntos de Georg Cantor; oposición que, según parece, contribuyó a agravar la enfermedad mental de éste. Sin embargo, Kronecker no publicó ni una sola línea contra la teoría de conjuntos; su oposición fue básicamente el uso de sus influencias para que Cantor no pudiese publicar sus artículos.

irracional[2]. Su oposición a Cantor tenía la misma base, ya que no aceptaba el principio de inducción transfinita.

Pocos matemáticos de su tiempo siguieron las ideas de Kronecker; sin embargo, sus planteamientos pasaron a una nueva escuela matemática: el intuicionismo que afirmará que no existen objetos matemáticos si no existen procedimientos para su construcción. Bien conocida es la frase de Kronecker: "Dios creó los naturales, todo lo demás es construcción humana", es decir, los objetos de la aritmética y del álgebra, los números enteros positivos, son entidades que 'existen'; mientras que los objetos del análisis matemático, los racionales, los irracionales, los imaginarios, los trascendentes, etc. son meros 'símbolos'.

Intuicionismo

El axioma de elección de Zermelo recibió sus primera críticas de los matemáticos franceses Emile Borel (1871-1956), René Louis Baire (1874-1932) y Henry Lebesgue (1875-1941) quienes, en 1905, defendían que el axioma era puramente existencial, no constructivo y, con ello, iniciaban un debate sobre las convenciones en matemáticas, con sus raíces en el constructivismo kroneckeriano. Aunque ninguno de ellos formulará una filosofía coherente de las matemáticas, sí que pondrán a debate algunos conceptos básicos, que encontraremos en la raíz del intuicionismo matemático. En primer lugar la clara distinción entre lógica y matemáticas (en abierta oposición a Russell): Si las matemáticas están enlazadas con la realidad, el papel de la lógica se reduce a proporcionar un número ilimitado de posibilidades entre las que elegir[3]. En segundo lugar la existencia de los objetos matemáticos: No aceptan que la consistencia sea un requisito suficiente (aunque sí necesario) de la existencia; no obstante, tampoco definen con claridad cuál debiera ser la condición de suficiencia (quizá algún tipo de característica esencial)[4].

Estas ideas básicas fueron revisadas y debatidas por Henri Poincaré (1854-1912) en una serie de artículos publicados entre 1905 y 1912 en la *Revue de Métaphisique et de Morale*. En ellos se oponía enérgicamente a la visión russelliana de la matemática como extensión de la lógica. Poincaré, como neokantiano, expresaba su convencimiento sobre el carácter sintético[5] de las matemáticas, poniendo como ejemplo el principio de inducción completa

2 Nótese que la exigencia de finitismo, será también una de las exigencias del formalismo hilbertiano.

3 Borel lo expresa magistralmente: "El único papel de la lógica ... es proporcionar los materiales; y no podemos confundir al cantero con el arquitecto".

4 Para una referencia más extensa a los semi-intuicionistas franceses puede consultarse Hesseling.

5 Según Kant, un juicio analítico es el que es necesariamente verdadero bajo normas puramente lógicas. El juicio sintético, por el contrario, basa su veritabilidad en recursos no lógicos, como la experiencia.

[Ver 3 Detlefsen Pág. 504-505]. Según Poincaré, la aplicación de dicho principio permite pasar de una proposición particular a una general, mediante la simple intuición de la secuencia completa de los números naturales; aplicación que estaría vedada para la lógica que, en ningún caso, podría realizar tal paso. Esta intuición, según Poincaré, no debe entenderse como un tipo de inducción o de intuición sensorial, sino como una pura comprensión mental de algún principio o relación fundamental; sin ella, las matemáticas son imposibles[6]. Otro aspecto importante defendido por Poincaré, es la negación de la existencia del infinito actual y, con ella, la imposibilidad de las definiciones impredicativas.

Quien recogerá estos antecedentes y construirá un nuevo paradigma para las matemáticas será Luitzen Brouwer (1881-1966). La tesis doctoral de Brouwer *Sobre los fundamentos de las matemáticas* (1907), es el primer acto del intuicionismo [Ver 9 Hesseling Pág. 34] y una declaración de principios. Sin usar todavía la palabra 'intuicionismo', es suficientemente claro: "No pueden existir matemáticas, si no han sido construidas intuitivamente". Los títulos de sus tres capítulos establecen los temas básicos sobre los que girarán las polémicas posteriores: *La construcción de las matemáticas*, *Matemáticas y experiencia* y *Matemáticas y lógica*. Brouwer defiende que las matemáticas son una libre creación mental, desarrollada a partir de una intuición primordial (la del tiempo) e independiente de la experiencia; cualquier construcción lógica de las matemáticas conduce a una construcción lingüística que nunca podrá identificarse con las matemáticas reales[7].

Los debates de los años 20: Brouwer, Weyl, Hilbert y Bernays

La primera vez que se usan los términos "formalismo" e "intuicionismo" [Ver 13 Mancosu Pág. 180] es en una recensión, escrita por Brouwer en 1911, del libro de su profesor y amigo Gerrit Mannoury (1867-1956) titulado *Methodologisches und Philosophisches zur Elementar-Mathematik*. La influencia de Mannoury en el inicio del pensamiento brouweriano es reconocida por el propio Brouwer [Ver 9 Hesseling Pág. 28-29] aunque, en este caso concreto, Mannoury no utiliza dichos términos, sino que habla de dos grupos de matemáticos

6 A este respecto, son muy ilustrativas las cartas abiertas entre Russell y Poincaré publicadas en *Mind*, Vol 15 Num. 57 de enero de 1906 (págs 141-143), a raíz de la recensión hecha por Russell del libro de Poincaré "*Science et Hypothèse*" en un número anterior de la revista.

7 Para una crítica in extenso de la Tesis doctoral de Brouwer pueden consultarse el capítulo 2.3 de Hesseling o también el capítulo 2.4 de van Sigt1. van Stigt, el autor de este libro, descubrió en 1976, la primera versión de la tesis, en la que su director, Diederik Korteweg (1848-1941) había rechazado grandes trozos de la misma. En una carta fechada el 11 de noviembre de 1906, Korteweg le escribe a Brouwer: "After receiving your letter I have again considered whether I could accept Chapter II as it stands, but honestly Brouwer, I cannot. I find it all interwoven with a kind of pessimism and a mystical attitude to life which is not mathematics and has nothing to do with the foundations of mathematics." vanStigt2. En este mismo artículo, van Stigt señala que existen otras cartas de Korteweg mucho más duras, pero no enviadas a Brouwer.

con visiones diferentes: *Kantianismus y Symbolismus* [Ver 9 Hesseling Pág. 52]. No obstante, los términos intuicionismo y formalismo, adquirirán pleno sentido con la conferencia de admisión en la Academia Holandesa de las Ciencias que pronuncia Brouwer en Octubre de 1912 y que fue traducida al inglés en 1913 por el *Bulletin of the American Mathematical Society*. En ella, explica con detalle las diferencias entre ambas concepciones, exponiéndolas en su forma más radical:

> "La pregunta sobre dónde reside la exactitud matemática, es respondida de forma diversa: los intuicionistas dicen que en la mente; los formalistas, en el papel" [Ver 9 Hesseling Pág. 55].

La Primera Guerra Mundial (1914-1918) significa un fuerte descenso en las actividades académicas y en la comunicación internacional, por lo que la polémica no se desatará hasta una vez finalizada ésta. Por su importancia posterior, conviene indicar que Brouwer, a propuesta de Felix Klein (1849-1925), acepta en 1914 el puesto de editor de la revista *Mathematische Annalen*, quizá la revista matemática más prestigiosa del momento.

El debate

La polémica formalismo - intuicionismo dominará todo el debate fundacional durante los años 1920's, teniendo a Hilbert y Brouwer como sus máximos exponentes. Dos serán los temas centrales del debate [Ver 13 Mancosu Pág. 2]:

1. La naturaleza de las matemáticas: como construcción del entendimiento humano o como teoría de los lenguajes formales.
2. El papel de Principio de Tercio Excluso (PTE) en matemáticas y la lógica alternativa restrictiva de Brouwer.

El debate, bien sea por el carácter difícil de Brouwer o bien por la gran influencia de Hilbert, traspasó los ámbitos puramente académicos para convertirse en un juego de enfrentamientos entre sus protagonistas, que alcanzará, en ocasiones, el nivel personal[8]. Este juego de enfrentamientos se iniciará en 1921, con lo que Hilbert considerará una deserción: la de su alumno Hermann Weyl (1885-1955), quien publica en ese año Sobre la nueva Crisis de Fundamentos en las Matemáticas, defendiendo (aunque no en su totalidad) las tesis de Brouwer; y finalizará en 1928 con la expulsión de Brouwer del consejo editorial deMathematische Annalen mediante un recurso poco limpio de Hilbert y que llevó a Albert Einstein (1879-1955)[9] a calificarlo de "guerra de sapos y ratones".

8 Como el que enfrentó a Brouwer con Fraenkel en 1927 conocido gracias a la correspondencia de éste último vanDalen4.

9 Albert Einstein también formaba parte del consejo editorial de la revista. Hilbert, que era uno de los editores jefes, no podía estatutariamente despedir a los editores asociados, como Brouwer; pero recurrió a la argucia de

En el siguiente cuadro se exponen sumariamente las publicaciones, en esos años, de los cuatro autores protagonistas del debate

	Brouwer	Weyl	Hilbert	Bernays
1918		El Contínuo	Pensamiento Axiomático	
1919	Teoría de Conjuntos Intuicionista	El círculo vicioso en los actuales Fundamentos del Análisis		
1921	¿Debe tener todo número real una expresión decimal?	Sobre la nueva crisis de Fundamentos en Matemáticas	Notas del curso de Fundamentos de las Matemáticas	
1922			La nueva Fundamentación de las Matemáticas	Sobre las ideas de Hilbert sobre la Fundamentación de la Matemática; La significación de Hilbert para la Filosofía de las Matemáticas
1923	División intuicionista de las nociones fundamentales de las Matemáticas		Los Fundamentos lógicos de las Matemáticas	Recensión del libro de Aloys Müller: El objeto de las Matemáticas; Respuesta a la nota de Aloys Müller: Sobre los números como signos
1924	Demostración de que toda función completa es uniformemente contínua	Reseñas sobre los principales problemas de las Matemáticas		
1925	Addendum a la división intuicionista de las noc...	La situación epistemológica actual de las Matemáticas	Sobre el Infinito	
1926		Filosofía de las Matemáticas y las Ciencias Naturales		Investigaciones axiomáticas sobre el cálculo en Principia Mathematica
1927	Sobre los dominios de definición de las funciones; Notas del curso de Intuicionismo Berlin		Los Fundamentos de las Matemáticas	
1928	Reflexiones	Comentarios a la 2ª	Fundamentos de	Apéndice a la lección

disolver el consejo editorial en pleno, para volverlo a nombrar al cabo de un tiempo prescindiendo de Brouwer. Einstein y Constantin Carathéodory (1873-1950) renunciaron a volver a ocupar sus puestos en el consejo. Este episodio ha sido ampliamente tratado: grattan, hesseling, mancosu, vanSigt1. Este último autor achaca a este episodio, la escasa productividad científica de Brouwer en los años 30's, debido a su pérdida de confianza en sí mismo y en la naturaleza humana: "The experiences of 1928 had killed what little trust Brouwer had in his fellow men and human nature. ... There was a loss of self-confidence during these years, a growing doubt in his own ability to continue his programme of re-construction."vanSigt1

	intuicionistas sobre el formalismo	lección de Hilbert sobre Fundamentos de la Matemática	Lógica Teórica (junto con Ackermann)	de Hilbert sobre Fundamentos de la Matemática
1929	Matemáticas, Ciencia y Lenguaje	La Consistencia en Matemáticas	Problemas en la Fundamentación de las Matemáticas	
1930	La estructura del Contínuo		Naturaleza y Lógica	La Filosofía de las Matemáticas y la Teoría de la Demostración en Hilbert
1931		Graduación del Infinito	La Fundamentación de la Teoría de los Números; Demostración del Tertium non datur	

Como se puede comprobar, no existe un acerbo muy abundante de publicaciones, lo que reafirma la idea de que los enfrentamientos se produjeron fuera del campo estrictamente académico. Según algunos autores [Ver 17 Reid Pág. 150], el propio Hilbert no leyó nunca ni una solo línea de los escritos de Brouwer[10]. Y es un hecho que Hilbert prefirió, en general, ofrecer sus ideas en cursos y en conversaciones con sus colaboradores.

La lógica

Es precisamente en una conferencia de Hilbert, pronunciada en Zurich en septiembre de 1917, en la que vuelve a insistir en la necesidad de resolver los problemas que estaban en la base de su famosa conferencia del Congreso del año 1900:

1. El problema de la resolución de cualquier cuestión matemática (la completud).
2. El problema de hallar un método simple y regulado para las demostraciones (teoría de la demostración).
3. El problema de la relación entre contenido y formalismo (los objetos matemáticos).
4. El problema de la decibilidad mediante procedimientos finitos (el finitismo) [Ver 17 Reid Pag. 151].

Durante unos años, Hilbert no fue muy activo debido a problemas familiares. Pero a partir de 1920-1921 empezó a desplegar una gran actividad. Como afirma Adolf Kratzer (1893-1983), su asistente en esa época en cuestiones de Física[11]:

10 Los escritos de Brouwer se publicaron en la mayoría de los casos en holandés en el boletín de la Royal Ducht Academy of Sciences. A pesar de ello, el propio Brouwer hizo versiones en alemán de la mayoría de ellos.

11 Hilbert tenía dos asistentes: para Matemáticas, Bernays (que había sustituido a Weyl) y para Física, Kratzer (que también colaboraba con Heisenberg).

> "En verano de 1920, [Hilbert] estaba interesado sobre todo por los problemas de la mecánica del átomo. Su objetivo era la axiomatización. Sus preguntas siempre se dirigían a mi; me parecía que sólo hablaba yo, mientras Bernays escuchaba. Pero a partir del invierno de 1920-1921, sus intereses empezaron a cambiar. Ahora su objetivo primordial era la formalización de los Fundamentos de las Matemáticas sobre una base lógica; y Bernays hablaba mientras yo escuchaba" [Ver 17 Reid Pág. 153].

La propuesta de Hilbert es, pues, formalizar las Matemáticas dentro de un sistema cuyos objetos -teoremas y demostraciones- se expresen, mediante el lenguaje de la lógica simbólica, como proposiciones que tienen su estructura lógica pero carecen de contenido.

El rechazo de Brouwer a esta propuesta es frontal: "En matemáticas, desde el comienzo mismo, tratamos de lo infinito; mientras que la lógica corriente esta hecha para razonar acerca de colecciones finitas" [Ver 10 Heyting Pág. 13].

El principio de tercio excluso (PTE)

En una fecha tan tardía como 1951, Weyl todavía afirmaba que:

> "El Principio de Tercio Excluso para este tipo de proposiciones [las referidas a conjuntos infinitos] puede ser válido para Dios, que conoce todas las infinitas secuencias de todos los números naturales tal como son y de un solo vistazo, pero no lo es para la lógica humana" [Ver 31 Weil Pág. 552].

Esta afirmación significa retomar el argumento intuicionista de aquellos años que rechaza su uso indiscriminado: frente a una proposición del tipo $\exists s \in S(s : Ps)$, si S es finito, es posible -en principio- examinar cada uno de los elementos de S para verificar si alguno cumple la propiedad P , y así demostrar la proposición Pero si S es un conjunto infinito, esta verificación es imposible. El problema que plantea este rechazo, es que el principio de tercio excluso se halla en la base de las demostraciones por reducción al absurdo, tan usuales en las matemáticas clásicas, de tal forma que muchas demostraciones, hasta entonces aceptadas, serían inválidas.

Brouwer ya había hecho referencia al PTE en su tesis doctoral afirmando que era vacío de contenido, pero su tratamiento había sido muy breve [Ver 9 Hesseling Pág. 40]. El primer artículo de Brouwer sobre el tema que tiene repercusión inmediata es su "Teoría de Conjuntos Intuicionista" (1919). En el mismo rechaza, además de otras cosas, el PTE como herramienta para las demostraciones, afirmando que tan sólo tiene un valor heurístico y escolástico y que es equivalente al axioma hilbertiano de resolubilidad de todos los problemas [Ver 13 Mancosu Pág. 23]. La posición de su correligionario Weyl, no es tan drástica: en su artículo"Sobre la nueva crisis de fundamentos en las matemática" (1921) afirma:

> "En su rechazo del axioma lógico del tercio excluso, Brouwer va esencialmente más allá de lo que he expuesto hasta aquí. Él niega su validez, no sólo para las proposiciones existenciales sobre secuencias

numéricas, sino también para las proposiciones existenciales sobre los propios números naturales" [Ver 13Mancosu Pág. 96][12]

En definitiva, Weyl, que es un alumno de Hilbert, no está de acuerdo con la negación del principio de resolubilidad de todos los problemas. La propuesta de Weyl es excluir de la aplicación del PTE sólo a las proposiciones existenciales y universales. Es decir, sólo aceparía como reglas de cuantificación: 1) $\forall x P(x) \rightarrow P(a)$ y 2) $P(a) \rightarrow \exists x P(x)$ y ninguna más.

En septiembre de 1920 tiene lugar el Congreso de Cienítficos alemanes, coincidiendo con el Congreso de Matemáticos de Estrasburgo (al que los matemáticos alemanes no son invitados como consecuencia de la guerra mundial). El título de la conferencia de Brouwer es "¿Tiene todo número real una expansión decimal?", y se publica el año siguiente en Mathematische Annalen. La respuesta de Brouwer es negativa, basándose en el incompleto conocimiento que tenemos del desarrollo decimal de π [Ver 13 Mancosu Pág. 28-35].

En 1923, Brouwer participa en el Congreso Físico y Médico Flamenco de Amberes y en la Reunión Anual de las Sociedad Matemática Alemana en Marburgo. En ambas reuniones presenta el primer contraejemplo contra el PTE. El ejemplo es contra la ley de tricotomía: $\forall n \in \mathbb{R}(n < 0 \vee n = 0 \vee n > 0)$. Propone la construcción de un número real mediante la secuencia $\langle c_1, c_2, c_3, c_4 \ldots \rangle$ construida de la siguiente manera[13]:

Sea d_n el eneavo dígito de la expansión decimal de π . Asignaremos el valor n a la variable k si en d_n aparece la secuencia 0123456789 en la expansión decimal de π, es decir si $\langle d_n d_{n+1} d_{n+2} d_{n+3} \ldots d_{n+9} \rangle = \langle 0123456789 \rangle$. Entonces definimos:

$$c_i = \begin{cases} (-2)^{-k} & \text{si } i \geq k \\ (-2)^{-i} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Esta secuencia de Cauchy, $\langle c_1, c_2, c_3, c_4 \ldots \rangle$, define un número real que viola el PTE porque no podemos saber si es igual a 0 o si es distinto de 0 y, además, no es un número racional.

Hilbert, en su artículo "Los fundamentos lógicos de las matemáticas" (1923) acepta, al menos en la versión menos estricta de Weyl, que el uso indiscrimanado del PTE en conjuntos infinitos puede ser problemático y propone la adición de nuevos axiomas que expresen transfinitamente los razonamientos usados en las matemáticas clásicas; demostrando, claro

12 Puede verse también una detallada explicación en Hesseling

13 Proponemos el ejemplo tal como lo expone el propio Brouwer en Brouwer2, por ser más clara la exposición.

está, la consistencia del sistema resultante. Durante el año 1924, el debate sobre el uso del PTE se extiende, más allá del círculo de autores estudiados, hasta el punto de ser reconocido como uno de los temas centrales del debate sobre fundamentos [Ver 9 Hesseling Pág. 231].

Será Hilbert quien abrirá la vía de solución en su artículo "Sobre el infinito" (1925). En él se pregunta qué se puede hacer para no renunciar a las simples leyes de la lógica aristotélica [Ver 27 van Heijenoort Pág. 379]. Su respuesta es simple: de la misma forma que se introdujo $i = \sqrt{-1}$ para salvar las leyes del álgebra, debemos ahora introducir proposiciones ideales a las finitarias para mantener las leyes de la lógica clásica. Y a continuación expone un ejemplo de un conjunto de axiomas que además de incluir los principios clásicos (no contradicción, doble negación, introducción y eliminación del implicador, identidad e inducción completa) añade los siguiente axiomas transfinitos:

1. $\forall x P(x) \rightarrow P(a)$ inferencia del universal al particular (Aristóteles dictum)
2. $\neg \forall x P(x) \rightarrow \exists a \neg P(a)$ si un predicado no se cumple para todos los individuos, entonces existe un contraejemplo
3. $\neg \exists x P(x) \rightarrow \forall x \neg P(x)$ si no existe ningún individuo que cumpla el predicado, entonces el predicado es falso para todos los individuos [Ver 27 van Heijenoort Pág. 382]

indicando después que estos tres axiomas son derivables de un único axioma: el axioma de elección; "el más atacado de los axiomas en la literatura de las matemáticas", añade a continuación. Finalmente, al reconocer que no puede demostrar la consistencia del conjunto de axiomas expuesto, acaba diciendo:

> "Haciendo posible este importante paso final [la demostración de consistencia del sistema] con el método de los elementos ideales, nuestra Teoría de la Demostración es la piedra clave en el edificio de la teoría axiomática. Y como ya nos ha sucedido dos veces, primero con las paradojas del cálculo infinitesimal y después con las paradojas de la teoría de conjuntos, no nos puede suceder por tercera vez ni nunca más" [Ver 27 van Heijenoort Pág. 383]

Brouwer (y algún discípulo suyo) construirán con posterioridad otros contraejemplos similares al expuesto más arriba; siempre basados en la incapacidad de demostrar algún problema insoluble[14]. El propio Brouwer reconoce que el problema insoluble básico puede,

---

14 Arend Heyting (1898-1980) utilizará en heyting el par de primos gemelos más grande. El propio Brouwer utilizará en sus cursos de Viena de 1929, la conjetura de Goldbach:

$$c_i = \begin{cases} (-2)^{-i} & \text{si } \forall j \leq n, 2j + 4 \text{ es la suma de dos primos} \\ (-2)^{-k} & \text{si } \exists k \leq n, 2k + 4 \text{ no es la suma de dos primos} \end{cases}$$

con el tiempo, llegar a ser demostrado; con lo cual el contraejemplo desaparece. Pero como que Brouwer, al contrario que Hilbert, no cree que todo problema matemático pueda ser resuelto, siempre existirá la posibilidad de construir nuevos contraejemplos. No obstante, Brouwer, más adelante, denominará a este tipo de contraejemplos 'débiles', por la posibilidad de ser refutados.

Conviene considerar estos contraejemplos débiles, ya que en ellos se encuentran algunos de los elementos fundamentales de la filosofía de las matemáticas intuicionista:

1. El constructivismo: no se puede definir ningún concepto matemático sin haber dado una fórmula para su construcción. En este sentido, la definición de los números reales como cortes de Dedekind o de los números transfinitos de Cantor, serían un sinsentido desde el punto de vista intuicionista [Ver 28 van Sigt Pág. 233].
2. El antiplatonismo: el rechazo de la idea metafísica de que existen verdades eternas, independientes de nuestro conocimiento de ellas [Ver 10 Heyting Pág. 14].

Antes de ver los contraejemplos fuertes, conviene pararse en el artículo de Brouwer "Sobre los dominios de definición de las funciones" (1927) [Ver 27 van Heijenoort Pág. 446-463]. En él, además de demostrar que toda función completa es uniformemente continua, expone con claridad la teoría intuicionista del continuo[15] y establece que (nota al pie num. 10) no es posible separar el continuo $\mathbb{R}$ en dos subconjuntos disjuntos no vacíos A y B tales que $A \cup B = \mathbb{R}$. Para ello, construye una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida mediante:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in A \\ 1 & \text{si } x \in B \end{cases}$$

Esta función es total y, por tanto, uniformemente continua. Entonces A o B debe de ser igual a $\mathbb{R}$ y el otro subconjunto ha de ser vacío, lo que contradice la hipótesis inicial.

Esta propiedad de $\mathbb{R}$ le servirá en su siguiente artículo "Reflexiones intuicionistas sobre el formalismo" (1928) para argumentar un contraejemplo 'fuerte' (es decir, sin posibilidad de ser refutado) [Ver 13 Mancosu Pág. 43]. Para ello demuestra la falsedad de $\forall x \in \mathbb{R}(P(x) \vee \neg P(x))$, donde $P(x) =$ "x es racional" y $\mathbb{R}$ es el continuo intuicionista. Si fuese cierta, podríamos obtener una separación del continuo asignado 0 a los números racionales (A) y 1 a los irracionales (B) y, por la demostración anterior, sabemos que ello

15 Tema que ya había sido abordado por Weyl en su libro de 1918 "Das Kontinuum", pero que Brouwer llevará ahora hasta sus últimas consecuencias.

no es posible. Es importante señalar que, en este contexto, los números reales deben entenderse intuicionistamente; es decir, como choice sequences[16] convergentes.

El último ataque de Hilbert contra la posición de Brouwer se produce con su artículo "Los Fundamentos de las Matemáticas" (1927), donde vuelve a exponer el sistema axiomático expuesto en su "Sobre el infinito" y del que entresacamos la siguiente dura cita:

> "Quitarle el Principio de Tercio Excluso al matemático es lo mismo que prohibirle al astrónomo el telescopio o al boxeador usar sus puños" [Ver 17 Reid Pág. 149](Hilbert, 1927) [Ver 27 van Heijenoort Pág. 476]

Hilbert expresa su disgusto de forma poco académica:

> "En estas circunstancias, estoy asombrado de que un matemático pueda dudar de que el principio de tercio excluso sea estrictamente válido como sistema de inferencia. También me asombra que, según parece, haya constituido una comunidad entera de matemáticos que hacen lo mismo. Y más asombrado por el hecho de que, incluso en los círculos matemáticos, el poder de seducción de un único hombre, por muy temperamental e ingenioso que sea, sea capaz de tener los efectos más excéntricos e improbables". [Ver 27 van Heijenoort Pág. 476]

Hilbert se refería a un reducido número de matemáticos que, siguiendo a Brouwer, empezarían un proceso de formalización de la lógica intuicionista, entre los que se cuentan a Andrey Kolmogorov (1903-1987), Ludwig Bieberbach (1886-1982) y Arendt Heyting (1898-1980). El argumento final de Hilbert es, pues, ad hominem, lo que demuestra lo abatido que se hallaba por el tema [Ver 9 Hesseling Pág. 246].

La clausura del debate

Imposibilidad del programa formalista

Si Hilbert estaba abatido, más lo tuvo que estar cuando un joven llamado Kurt Godel (1906-1978) demostró en 1931 la imposibilidad de demostrar la consistencia de un sistema axiomático dentro del propio sistema axiomático. No obstante, de la mano de Skolem, von Newman, Tarski y otros, se entró en un amplio desarrollo de la Teoría de la Demostración.

La 'formalización' del intuicionismo

En los años sucesivos, y gracias fundamentalmente al esfuerzo de Heyting y sus discípulos, el intuicionismo entró en una dinámica 'formalista', estableciendo nuevos sistemas lógicos, y

---

16 No me he atrevido a traducir al castellano este término, porque podría resultar confuso: "secuencia escogida". En el fondo está la idea de secuencia a_i que satisface la condición de Cauchy:

$$\forall r \in \mathbb{Q}, \; r > 0 \to \exists n \in \mathbb{N}\left(\forall j,k > n, |a_j - a_k| < r\right)$$

conectando con las lógicas no clásicas, especialmente con las polivalentes. Sin embargo, el intuicionismo, no ha tenido influencias decisivas en los últimos desarrollos de las matemáticas.

Bibliografía:

1. Brouwer, L.E.J. "Collected works" edited by A. Heyting, 2 vols.. North Holland. Amsterdam, 1975-1976.
2. Brouwer, L.E.J. "Cambridge lectures on intuitionism" edited by D. van Dalen. Cambridge University Press. Cambridge, 1981.
3. Detlefsen, Michael. "Brouwerian Intuitionism". Mind, new series. Vol. 99 Num. 396 (Oct. 1990). Pgs 501-534.
4. Feferman, Solomon "Does Mathematics need new axioms?" The American Mathematical Monthly. Vol. 106 Num. 2 (Feb. 1999). Pgs 99-111.
5. Ferreirós, José. "Matemáticas y Platonismo(s)". Gaceta de la Real Sociedad Española de Matemáticas. Vol. 2 (1999). Pgs. 446-473.
6. Giaquinto, Marcus. "Hilbert's Philosophy of Mathematics". The British Journal for the Philosophy of Science. Vol. 34 Num. 2 (Jun 1983). Pgs. 119-132.
7. Gielen, W.; de Swart, H.; Veldman, W. "The Continuum Hypothesis in Intuitionism". The Journal of Symbolic Logic". Vol. 46 Num. 1 (Mar. 1981) Pgs 121-136.
8. Grattan-Guinness, I. "The search for mathematical Roots, 1870-1940". Princeton University Press. Princeton (NJ), 2000.
9. Hesseling, Dennis E. "Gnomes in the fog: the reception of Brouwer's intuitionism in the 1920's". Birkhaüser. Basel, 2003.

   Heyting, Arend. "Introducción al intuicionismo". Tecnos. Madrid, 1976.
10. Leonard, Robert J. "Ethics and the Excluded Middle: Karl Menger and Social Science in Interwar Vienna". Isis. Vol. 89 Num. 1 (Mar 1998) Pgs. 1-26
11. Mace, C.A. "Formalism". Mind, new series. Vol. 41 Num. 162 (apr 1932) Pgs. 204-211
12. Mancosu, Paolo. "From Brouwer to Hilbert: The debate on the Foundations of Mathematics in the 1920's". Oxford University Press. New York-Oxford, 1998.

13. Mancosu, Paolo. "Between Russell and Hilbert: Behmann on the Foundations of Mathematics". The Bulletin of Symbolic Logic. Vol. 5 Num. 3 (Set 1999) Pgs. 303-330.
14. Mancosu, Paolo; Zach, Richard; Badesa, Calixto. "The development of Mathematical logic from Russell to Tarski: 1900-1935". Preprint, Final Version - April 2005. To appear in Leila Haaparanta, ed. "The development of modern logic". Oxford University Press. Oxford, 2005.
15. Poincaré, H. "Le futur des Mathematiques". Revue Generale des Sciences pures et appliqueés. Vol. 23. (Dic, 1908).
16. Reid, Constance. "Hilbert". Springer. New York, 1978.
17. Schiller, F.C.S. "Formalism again". Mind, new series. Vol. 41 Num. 164 (Oct 1932) Pgs. 481-482.
18. Snapper, Ernst. "The three crises in Mathematics: Logicism, Intuitionism and Formalism". Mathematics Magazine. Vol 52 Num. 4 (Set 1979) Pgs 207-216.
19. Snapper, Ernst. "What is Mathematics?". The American Mathematical Monthly. Vol. 86 Num. 7 (Aug-Set, 1979) Pgs 551-557
20. Troelstra, Anne Sjerp. "Principles of intuitionism". Springer. Berlin, 1969.
21. Troelstra, Anne Sjerp; van Dalen, Dirk (eds.). "The L.E.J. Brouwer Centenary Symposium". North Holland. Amsterdam, 1981
22. van Dalen, Dirk. "Mystic, geometer and intuitionist: the life of L.E.J. Bouwer". Clarendon Press. Oxford, 1999.
23. van Dalen, Dirk. "Hermann Weil's Intuitionistic Mathematics". The Bulletin of Symbolic Logic. Vol. 1 Num. 2 (Jun 1995) Pgs. 145-169
24. van Dalen, Dirk. "Brouwer and Fraenkel on Intuitionism". The Bulletin of Symbolic Logic. Vol. 6 Num. 3 (Set 2000) Pgs. 284-310
25. van der Waerden, Bartel. "Interview with Bartel Leendert van der Waerden by Yvonne Dold-Samplonius". Notices of the American Mathematical Society. Vol. 44 Num. 3 (Mar 1997) Pgs. 313-320
26. van Heijenoort, Jean. "From Frege to Gödel. A Source book in Mathematical Logic, 1879-1931". Harvard University Press. Cambridge, 1967.
27. van Stigt, Walter. "Brouwer's Intuitionism". North Holland. Amsterdam, 1990.
28. van Stigt, Walter. "The rejected parts of Brouwer's dissertation on the foundations of mathematics". Historia Mathematica. Vol. 6. Num. 4 (Nov 1979). Pgs. 385-404.

29. Weyl, Hermann. "Mathematics and Logic". The American Mathematical Monthly. Vol. 53 Num 1. (Jan 1946) Pgs. 2-13

30. Weyl, Hermann. "A half-century of Mathematics". The American Mathematical Monthly. Vol. 58 Num 8. (Oct 1951) Pgs. 523-553