

blecen nuevos centros para el estudio de la complejidad en las universidades, o como institutos independientes. Finalmente, incluso la estructura departamental de las universidades reflejará la nueva síntesis de la ciencia.

Una nueva visión mundial pugna por nacer mientras los científicos proceden a examinar el amplio dominio de los sistemas complejos. Por mi parte, todavía no logro visualizar la forma final de esta nueva arquitectura del conocimiento, sino sólo algunas de sus características, que he esbozado ya sucintamente. Pasarán décadas, tal vez siglos enteros, antes de que se asiente el polvo y surja un nuevo marco consensual de conocimiento, un marco que será informado por nuestra comprensión del orden inmutable de la naturaleza: el código cósmico.

El nuevo conocimiento que adquirimos ejercerá una influencia transformadora sobre el modo en que se organiza nuestra sociedad, y la manera de aplicar la información y la tecnología. Si los sistemas complejos pueden entenderse "de abajo hacia arriba", la planificación ya no se basará tanto en conjeturas. Este conocimiento, sin embargo, no se obtiene automáticamente. Tanto los recursos humanos como los materiales deberán asignarse a tal fin. Se requiere considerable investigación en el desarrollo educacional y comercial.

Las sociedades adelantadas deben comenzar a aceptar el desafío que plantea esta nueva frontera en el universo de las ciencias. Yo exhortaría a los Estados Unidos a elaborar una política y estructura institucional, en el campo de las ciencias de la información y las ciencias de la complejidad, similar a la que dio origen a la Fundación Nacional de Ciencia y los Institutos Nacionales de Salud hace varias décadas. El apoyo inicial para esas ciencias debe provenir de la iniciativa gubernamental, seguida luego por el desarrollo comercial. Los dirigentes del gobierno deben entender que el encauzar proyectos en forma fragmentaria no resulta productivo; lo que se requiere es la promoción de toda una nueva cultura científica.

Estoy convencido de que las sociedades que dominen las nuevas ciencias de la complejidad y puedan convertir ese conocimiento en productos nuevos y formas de organización social, se convertirán en las superpotencias culturales, económicas y militares del próximo siglo. Aunque hay grandes esperanzas de que así se desarrollen las cosas, existe también el terrible peligro de que esta nueva proyección del conocimiento agrave las diferencias entre quienes lo poseen y quienes no.

Y ahora, para comenzar, empecemos por el nivel más elemental y veamos lo que los matemáticos tienen que decir sobre la complejidad.

3

Orden, complejidad y caos

"La mayoría de los números del continuo no pueden ser definidos por ninguna serie finita de palabras."

Mark Kac

¿Qué es la complejidad? Hasta ahora habíamos utilizado el término "complejidad" de manera bastante flexible, para expresar lo que quiere decir en el lenguaje corriente: hace referencia a un estado de cosas dotado de muchos componentes distintos que interactúan entre sí. Pero ya es hora de ir más allá de esta definición poco rigurosa. La complejidad, como procuraremos comprender en este capítulo, es una medida cuantitativa que puede ser asignada a un sistema físico o a una computación que está a mitad de camino entre la medida del orden simple y el caos más absoluto. Un cristal de diamante, por ejemplo, con sus átomos prolijamente dispuestos, es "ordenado"; una rosa, en la cual juega tanto el azar como el orden en la disposición de sus partes, es "compleja"; el movimiento de las moléculas de un gas es verdaderamente "caótico". La complejidad, entonces, cubre un vasto territorio que se extiende entre el orden y el caos. Resulta interesante observar que es grande nuestra comprensión de sistemas totalmente ordenados como el de los cristales, en el cual los átomos se encuentran perfectamente arreglados en una suerte de enrejado, o aun de la dinámica de átomos simples y unitarios como la bomba de hidrógeno. También entendemos bastante acerca de sistemas totalmente caóticos como los gases, porque podemos aplicarles las leyes de la estadística de modo bastante eficaz. El caos garantiza una conducta promedio muy estable, de modo que podemos hallar leyes pertinentes. Es en el ámbito de la complejidad, que se da entre el orden y el caos, donde se plantea el mayor desafío para la ciencia. Si bien podemos definir el orden y definir el caos, ¿cómo definir la complejidad con mayor precisión?

Matemáticos y científicos han echado un vistazo a la complejidad y procuraron definirla de modo que esté en consonancia con estas nociones intuitivas y, sin embargo, siga siendo precisa. Algunas personas se resisten a definiciones matemáticas tan precisas de las

cosas porque eliminan la flexibilidad en nuestro modo de pensar sobre ellas. Sin embargo, considero que el enfoque matemático, por ser preciso, ahonda considerablemente nuestro conocimiento y captación de lo que anteriormente se mostraba evasivo. La claridad es el primer paso hacia una comprensión más profunda.

Por el momento, olvidemos cualquier vaga idea sobre la complejidad que podríamos haber albergado de antemano y veamos qué han descubierto matemáticos y demás. En este capítulo examinaremos diversos conceptos de la complejidad: la complejidad algorítmica, la complejidad computacional, la complejidad basada en la información, así como la complejidad física y la profundidad lógica. El enfoque básico que seguiremos inicialmente estriba en que, si podemos definir la complejidad para un objeto abstracto, como un número, entonces podremos entender de qué modo la definición se aplica a otros objetos reales en el universo físico.

Examinemos entonces, de entrada, el infinito continuo de números entre el cero y el uno, cuando se los escribe en expansión decimal. El primer número de la serie es 0,00000 y el último, 0,99999..., en los que la serie de puntos indica que siguen así hasta el infinito. Algunos de los números en este continuo, como

0,101010101010

parecen bastante ordenados y simples. Pero también podemos concebir la posibilidad de generar los dígitos de un número haciendo rodar un dado de diez caras con los números de 0 al 9 en ellas. Podríamos entonces obtener un número bastante desordenado, como

0,185320942116

¿Cómo caracterizar con mayor precisión la diferencia entre los dos números? A fin de responder a esta pregunta, formulamos otra: ¿cómo computar a éstos y otros números?

En su trabajo seminal, Alan Turing distinguió entre números "computables" y "no computables". A fin de hacer precisa dicha distinción, Turing imaginó la posibilidad de redactar un programa, denominado algoritmo, para un ordenador que computaría varios números. Como ejemplo, tomemos el número

0,42857142

A primera vista, este número parece algo azaroso y complicado, y habría pensar que se lo obtuvo arrojando el dado. Sin embargo, supongamos que nos damos cuenta de que el número es, sencillamente, 3 dividido por 7 expresado en decimales. En consecuencia, el algoritmo que computa este número simplemente dice: "Dividir 3 por 7 e imprimir el resultado" se trata de un programa simple. Otro ejemplo es el número C de Champernowne = 0,123456789101112131415161718192021..., que también parece complicado pero, como podemos observar, realmente está construido escribiendo en orden los números a partir del 1. Este programa,

también simple, podría decir: "Imprimir los números en orden ascendente". Análogamente, el algoritmo de 0,101010101010 diría: "Imprimir 10 seis veces".

Todos éstos son ejemplos de números "computables", pues hay un algoritmo simple que nos da el número aun cuando éste sea infinitamente largo, como la expresión decimal de $3/7$ o el número de Champernowne. Para algunos números, sin embargo, y hablamos aquí de los denominados "no computables", el único algoritmo que conocemos consiste en especificar explícitamente el número mismo dentro del programa. Por ejemplo el único algoritmo que conozco para el número que habíamos generado haciendo rodar el dado es "Imprimir 0,185320942116". Este programa, por supuesto, no es todavía demasiado largo. Sin embargo, si por ejemplo continuáramos con el número 0,101010101010 hasta llegar a un millón de 01, la longitud del programa para computar este número no variaría demasiado: "Imprimir 01 un millón de veces". Por contraposición, si continuamos con el número al azar obtenido arrojando el dado de diez caras otro millón de veces, el único programa que computaría ese número es: "Imprimir 0,185320942116..." en que "..." significa otro millón de dígitos específicos. Hay aquí un considerable aumento en la longitud del programa.

A partir de las ideas de Turing aprendemos que es posible caracterizar números diferentes por la longitud del programa que se requiere para computarlos. Para números "computables", aun cuando sean infinitamente largos, es posible escribir un programa relativamente corto que los calcule. Para los números al azar "no computables", el único algoritmo que permitirá cumplir la tarea ya contiene explícitamente toda la información en el número: el algoritmo es, por lo menos, tan largo como el número. Esta distinción brinda una *definición* de un número al azar, postulada independientemente en 1965 por A. N. Kolmogorov, matemático soviético, y Gregory J. Chaitin, por entonces estudiante del City College de la Universidad de la Ciudad de Nueva York: los números al azar requieren programas de computación que sean por lo menos tan largos como el número mismo. Ninguno de los dos matemáticos estaba al tanto de la propuesta análoga formulada en 1960 por Ray J. Solomonoff, quien trataba de hallar una definición de la simplicidad de las teorías científicas (más que de la complejidad de los números).

Aunque hemos imaginado que los programas que computan los números están consignados en un lenguaje común y corriente, es evidente que al asignarse valores numéricos a las letras del alfabeto el programa en sí puede ser inscrito como una cadena de números enteros. Por tanto, el contexto informacional completo del programa puede ser representado como un número en el continuo que va entre cero y uno: al igual que el número que supuestamente

computa el programa. De ahí que la longitud de la cadena de números enteros que representa el programa puede compararse con la longitud del número que debiera computar.

Prácticamente hemos concluido. Pero antes de dar la "definición algorítmica de la complejidad", debemos explicar qué es un "programa mínimo". Cualquier número específico puede ser computado por un número infinito de algoritmos diferentes. Por ejemplo, el número 2397 puede ser obtenido a partir de los programas "Restar 3 a 2400", "Sumar 17 a 2380" o "Multiplicar 51 por 47", o un número infinito de diferentes programas. De interés especial es el *programa mínimo*: el más breve que hayamos inscripto en una cadena de números enteros. Puede haber un programa tal, o puede haber muchos programas mínimos de ese tipo. Hay algo que es seguro: la cadena de números enteros, el número que representa al programa mínimo, debe ser obtenido al azar. De lo contrario, de acuerdo con la definición que anteriormente dimos de azar, podríamos escribir un programa más breve que computaría el número que representa al programa por contraposición con el supuesto de que se tratara de un programa mínimo.

Podemos ahora dar la definición algorítmica de la complejidad de un número. Se trata, sencillamente, de la longitud del programa mínimo requerido para computarlo. De este modo podemos asignar una medida cuantitativa a cada número del continuo, y será ésta la definición algorítmica de su complejidad.

Para los números al azar generados haciendo rodar un dado, como hemos visto, la complejidad de acuerdo con esta definición es aproximadamente igual a la longitud del número, pues el algoritmo mínimo debe contener el número mismo. Por contraposición, para números altamente ordenados, como 0,010101... ó $3/7 = 0,42857142...$, la longitud del programa mínimo es breve, de ahí que la complejidad sea baja. Los números intermedios entre aquellos para los cuales la longitud del programa mínimo es breve o aquellos cuya longitud es aproximadamente la longitud del número mismo, son números en los que hay una mezcla de orden y de caos: el verdadero ámbito de los "números complicados". Se encuentran entre el orden y el caos.

La reacción de algunas personas ante todas estas definiciones matemáticas es que sólo tienen que ver con la complejidad de las cadenas de números. ¿Qué tiene que ver esto con el mundo de los objetos físicos reales que procuramos entender? Un ejemplo nos demostrará cómo pueden aplicarse estas ideas al mundo real. Consideremos la molécula ADN para un animal específico (podría ser usted). Esta molécula es una secuencia de pares básicos que nos dicen cómo hacer una réplica genética de este animal. La secuencia de pares básicos podría diagramarse en un número único. Por ejemplo, las cuatro letras del código genético podrían designarse 0,

1, 2 y 3, respectivamente. La molécula, entonces, está perfectamente representada por una secuencia como 023011032221... Así podemos construir un número finito que representa el contenido informacional de la molécula de ADN y podemos ahora preguntar: ¿cuál es la longitud del algoritmo mínimo que producirá ese número?

Algo que conocemos es el código de secuencias triples de pares básicos para los veinte aminoácidos, piedras laminares de todas las proteínas. De ahí que sabemos que el número no es completamente azaroso, porque ya hay mucho orden en el número en sí: podemos verlo como una secuencia de tripletes. Sabemos también, empíricamente, que hay mucha redundancia —repetición— en la molécula ADN (descubrimiento intrigante), y eso también representa un orden. Finalmente, sabemos que esta molécula, en principio, contiene las instrucciones para hacer al animal, todos sus órganos, el color de pelo, etc., y que también representa un ulterior contenido informativo de orden muy elevado. Todo esto confirma el argumento de que la molécula ADN y el número que la representa no se dan al azar y, sin embargo, éste tampoco está perfectamente ordenado: se trata de un "número complicado". Si pudiéramos descubrir la longitud del algoritmo mínimo, ciertamente sería mucho menor que la longitud del número de ADN y podría brindar una medida cuantitativa de la complejidad del animal.

Es fácil de ver cómo se asignó un número a la molécula ADN, porque se trata, simplemente, de una cadena codificada de pares básicos. Pero, de hecho, este tipo de construcción puede aplicarse a cualquier cosa que sea hecha de materia. Por su simplicidad, circunscribiremos nuestra atención a objetos hechos con las seis docenas de átomos. Estos últimos pueden ser visualizados como letras de un alfabeto, y el alfabeto puede ser codificado en números, como se hace en la criptografía. No sólo pueden codificarse los átomos, sino también la disposición explícita de los átomos, sus coordenadas dentro del objeto, su impulso angular y aun su movimiento. De manera que el estado material de un objeto, como una silla, o el universo entero, puede, en principio, ser representado por un número único, que, en verdad, ha de ser muy largo.

En la década de 1930, Kurt Gödel demostró cómo se podían representar cadenas de símbolos, como los que aparecen en una prueba de lógica, en forma de un número único (el Gödel o número G). Para cada prueba lógica había un número único. Dado ese número, se podía decodificarlo y recobrar la prueba. Nuestra construcción de números para entidades físicas es similar en su espíritu. Debería ser posible (según las leyes de la física y la manera precisa en que decidamos codificar la estructura) representar el estado de las entidades físicas por un único número. A este número lo denominaremos número E, con la "E" de Entidad. (Soslayaré aquí la importante pregunta de cuán difícil es, realmente, encontrar ese

número.) Reducirlo todo a números es la fantasía pitagórica final, fantasía que lleva a realizar un sueño de ciencia ficción. Ocurre que una vez que conocemos el número E de un objeto, podemos preguntar cuál es la complejidad algorítmica de ese número y, entonces, asignar una medida cuantitativa a la complejidad de ese objeto. De este modo, podemos asignar una medida cuantitativa de complejidad a personas, gallinas, rocas o bacterias. Y entonces, ¿qué?

Por empezar, hemos logrado hacer bien precisa nuestra definición de la complejidad. En consecuencia, podemos desencadenar el fabuloso aparato de la teoría de la complejidad matemática sobre nuestro problema de definir la complejidad de las entidades materiales. Estas virtudes no deben soslayarse. Sin embargo, desde el punto de vista práctico, seguimos teniendo un problema. Antes de poder descubrir la complejidad de un número, tenemos que averiguar la longitud del algoritmo mínimo necesario para computarlo. Y para averiguar esa longitud debemos *probar* que un algoritmo específico verdaderamente es mínimo. ¿Cómo hacerlo? Esta cuestión nos sumerge en el tortuoso pero fascinante razonamiento gödeliano.

Tal como argumentó Gregory Chaitin, a fin de probar algo en matemática se necesitan una serie de axiomas (las propuestas del sistema, no demostradas, y asumidas como dadas) y las reglas de la inferencia; en una palabra, lo que se denomina sistema formal en el sentido que le asigna David Hilbert (véase otro capítulo de este libro, el titulado "Guerreros del infinito"). A dicho sistema formal de axiomas, puesto que consiste en cadenas de símbolos que expresan a aquéllos, puede asignársele un número G y, de ese modo, podemos formular preguntas sobre la complejidad de un número tal. El número G que representa los axiomas de un sistema formal será preferiblemente un número al azar. De no serlo, esto significa que podemos encontrar un algoritmo que es más sencillo que el número que representa los axiomas, de ahí que éstos puedan reducirse a axiomas más simples: no son axiomas irreducibles, y en realidad son teoremas basados en axiomas más simples todavía.

Chaitin ha sostenido también que además de los axiomas se necesita un programa que utilice dichos axiomas para demostrar que un algoritmo específico es realmente mínimo. El programa que busca las pruebas puede también ser codificado como un número. Con axiomas y programa a mano, podemos intentar la demostración de que ciertos números se dan al azar revelando que su algoritmo mínimo es por lo menos tan largo como el número. ¿Puede hacerse tal cosa? En realidad, no. La razón es que un número grande, del que deseamos demostrar que se da al azar, contiene cierta cantidad de información. El sistema formal de axiomas que utilizamos y el programa que empleamos para buscar la prueba de lo azaroso de dicho número pueden codificarse en otro número que tam-

bién contiene cierta cantidad de información. No puede utilizarse un sistema que es especificado por cierta cantidad de información para demostrar algo acerca de un sistema con una cantidad relativamente mayor de información. En matemática, nunca se obtiene más información que la que primero se suministra, a partir de los axiomas y reglas iniciales. Sería como esperar que un ratón se devorara a un elefante. Puesto que siempre podemos encontrar grandes números que contienen una cantidad arbitrariamente grande de información, siempre existirán números cuyo contenido informativo excede el de cualquier sistema de axiomas, y, por lo tanto, no puede hallarse prueba de que se dan al azar. Esto significa también que existen números para los cuales no podemos establecer el algoritmo mínimo y, entonces, definir su complejidad. Como dice Chaitin: "En tal sistema formal no puede demostrarse que una serie específica de dígitos sea de complejidad (algorítmica) mayor que el número de *bits* o unidades de información en el programa empleado para especificar la serie... De ahí que siempre habrá números cuyo carácter al azar no puede demostrarse". Conclusión ciertamente razonable.

Extraño estado de cosas. Si bien podemos demostrar que casi todos los números del continuo se dan al azar, no podemos probar que ningún número específico se dé realmente al azar. La matemática está plagada de ironías tales.

He debatido estas ideas matemáticas bastante abstractas acerca de complejidad algorítmica para demostrar no sólo cuán hermosas son conceptualmente, sino también las limitaciones fundamentales de éste o cualquier intento análogo por definir a la complejidad. La definición algorítmica de la complejidad brinda un marco matemático para nuestro pensamiento acerca de la complejidad y el azar, pero no brinda una definición práctica que podamos aplicar para los sistemas físicos.

Hemos analizado la *complejidad algorítmica*, es decir, la longitud del programa más breve para efectuar una computación. Otra definición interrelacionada es la de la *complejidad computacional*, atinente al tiempo que requiere un ordenador para solucionar un problema específico, medida directa de la dificultad del problema. La complejidad algorítmica es, en cierto sentido, una medida de la complejidad en el espacio (la longitud del algoritmo mínimo); la complejidad computacional es una medida de la complejidad en el tiempo (el necesario para resolver un problema) así como en el espacio. Los problemas de complejidad computacional constituyen un campo de investigación muy rico y en rápida expansión, tanto en el ámbito de la matemática como en el arte de las ciencias de la computación.

Ya hemos mencionado sucintamente este nuevo campo de complejidad computacional en nuestro análisis del enfoque compu-

tacional en la matemática. Los teoremas matemáticos, de acuerdo con este enfoque, no existen sin más en algún ámbito trascendente de la mente humana sino que realmente debe demostrárselos: tenemos que determinar si el teorema es cierto o falso dentro de un sistema formal específico de axiomas y reglas de inferencia. Supóngase que sabemos que un teorema específico puede decidirse dentro de un sistema formal de axiomas. Entonces podemos preguntar: ¿cuán difícil es decidir si es cierto o no? Se trata de un problema que se da en el campo de la complejidad computacional. He aquí un ejemplo:

La aritmética común y corriente que utilizamos es un sistema formal, pero tal como lo demostró Gödel, en la prueba del famoso teorema que lleva su nombre, es imposible de decidir: hay propuestas dentro del campo de la aritmética cuya verdad no puede demostrarse. No obstante, existe una forma restringida de aritmética en la cual sólo se da una operación —la suma de los números positivos y cero—; denominada aritmética de Presburger, ella puede decidirse, y todos los planteos son verificables. Por ende, este sistema de axiomas no se encuadra dentro del teorema de Gödel. M. J. Fischer y Michael Rabin han demostrado que en la aritmética de Presburger el problema de la decisión —el que un teorema sea cierto o no— insume una cantidad de tiempo superexponencial en la longitud del planteo del teorema. Esto significa que, si bien *en principio* todos los teoremas de la aritmética de Presburger son verificables, en la práctica demostrar dichos teoremas requerirá un tiempo mucho, mucho más largo que la vida entera del universo. Este conocimiento nos podrá decir cuánto cuesta, en tiempo de computación, el establecer los verdaderos teoremas aun de sistemas que pueden decidirse. Joseph Traub, jefe del departamento de ciencias de la computación de la Universidad de Columbia, exclamó: “¡Qué manera de enriquecer la pregunta de Hilbert!”, haciendo referencia a dicho interrogante, formulado por David Hilbert, sobre la posibilidad de demostrar todos los verdaderos teoremas de matemática. Hilbert concibió un proyecto matemático en el cual uno procedía a demostrar sistemáticamente todos los verdaderos teoremas de la matemática; pero nunca preguntó *cuánto tiempo* llevaría dar con los verdaderos teoremas. Si bien el punto de vista computacional profundiza nuestro conocimiento del reino de lo resoluble, a menudo sigue siendo bastante difícil establecer la real complejidad computacional de problemas específicos (así como es difícil descubrir el algoritmo mínimo). Sin embargo, se han verificado significativos progresos matemáticos en esta esfera.

Si examinamos la complejidad computacional de problemas matemáticos específicos, llegamos a una clasificación de dichos problemas en dos categorías amplias: los problemas que requieren una cantidad geométrica (exponencial) de tiempo de computación y los

que sólo requieren una cantidad aritmética (ley de posibilidades) de tiempo de computación. Los problemas que requieren una cantidad exponencial de tiempo de computación necesitan, de manera característica, millones de vidas del universo para ser resueltos, aun con superordenadores. Y ni siquiera pensemos en la posibilidad de llegar a una solución exacta. Los problemas cuya complejidad computacional es sólo aritmética en tiempo de computación pueden resolverse, por lo común, en una cantidad de tiempo razonable (la cantidad de tiempo que transcurre antes de que el matemático pierda interés en el problema).

Es importante poder distinguir entre las dos categorías de problemas, aunque no siempre resulte tan fácil. A menudo, no sabemos si se requiere un tiempo exponencial o de ley de posibilidades para resolver un problema. El problema del viajante de comercio —cómo dar con el camino más corto para visitar media docena de ciudades o más, visitando cada ciudad una vez y regresando a la de origen— es un problema que se sospecha de tipo exponencial, pero esto no ha sido demostrado. Nunca puede decirse si alguna persona inteligente no hallará algún día un algoritmo para resolver este problema utilizando solamente la cantidad de tiempo de computación que determina la ley de posibilidades. Para muchos problemas, sin embargo, los matemáticos conocen la clasificación: parte de un *corpus* creciente de conocimiento puro en el campo de la complejidad computacional. Pueden, así, establecer cuánto tiempo llevará resolver determinados problemas.

El campo de la complejidad computacional, que ha atraído a muchos de los mejores matemáticos, ha dado lugar al naciente campo de la *complejidad basada en la información*, desarrollada por Joseph Traub y sus colaboradores. Desearía describir también esta idea, debido a sus implicaciones prácticas.

Los tipos de problemas que son examinados por quienes trabajan en el campo de la complejidad computacional por lo general suelen estar perfectamente especificados, como el problema del vendedor de comercio. Todas las cartas están puestas sobre la mesa. En principio, si uno trabaja duramente (por *cuánto tiempo* quizá no se sepa), puede hallarse la respuesta, pues toda la información necesaria para resolver el problema está dada ahí mismo, junto a su planteo.

Pero en el mundo real la situación rara vez es tan clara y precisa. Sólo algunas de las cartas están puestas sobre la mesa. Como bien lo sabe todo aquel que debe tomar decisiones, los problemas con los que tropezamos en el mundo real suelen no estar especificados con precisión: la información es incompleta, o tal vez sólo conozcamos datos aproximados. “Así —observa Traub—, la complejidad computacional viene en dos sabores, según qué serie de supuestos se hagan sobre la información. ¿La información es comple-

ta, exacta y libre, como en el caso del problema del viajante de comercio? ¿O la información es parcial, contaminada y tiene su precio, como ocurre con toda una serie de problemas distintos del mundo real?" La meta de las personas que trabajan con la complejidad basada en la información "es crear una teoría general sobre problemas con información parcial o contaminada y aplicar los resultados a resolver problemas específicos en disciplinas varias". Este es el tipo de enfoque que se necesitará si hemos de encarar problemas que se dan en el ámbito de las ciencias biológicas, de la conducta y sociales. Por ejemplo, sólo poseemos información parcial o contaminada acerca del cerebro, la conducta animal y la economía mundial. ¿Qué puede esperarse que conozcamos (computemos) acerca de dichos sistemas, y cuán confiable es este conocimiento? Se trata de problemas en la teoría de la complejidad basada en la información, que se dan en un primer plano de las nuevas ciencias de la complejidad.

Con esto se completa mi breve reseña de algunas de las ideas importantes sobre el modo en que matemáticamente se define la complejidad. Desde un punto de vista intuitivo, estas ideas matemáticas de complejidad, aunque precisas, nos dejan insatisfechos. La complejidad, como medida de los objetos físicos, supuestamente se da en algún lugar entre el orden y el caos. Sin embargo, con la definición algorítmica de la complejidad, cuanto más al azar se dé un número, más complicado (caótico) será. Esa definición no se corresponde con una idea de complejidad entre orden y caos. En verdad, la definición algorítmica de complejidad parece estar mal aplicada: es, realmente, una definición del carácter *azaroso*, no de la complejidad.

Para aclarar este aspecto, volvamos al ejemplo de la molécula ADN: evidentemente, se trata de una molécula sumamente compleja. Sin embargo, la molécula ADN posee un orden, importante, que representa las instrucciones para crear un animal. Si comparamos la molécula ADN con otra molécula de la misma longitud en la cual los cuatro pares básicos se dan ordenados al azar (arrojando un dado de cuatro caras), entonces, de acuerdo con la definición algorítmica de la complejidad, esta molécula al azar es *más* compleja que la verdadera molécula ADN. Pero de hecho, no puede construirse nada a partir de la información en esa molécula al azar: se trata, simplemente, de algo al azar que no tiene sentido.

Otro ejemplo es el que brinda el lenguaje. El lenguaje escrito y oral evidentemente es muy complejo por comparación con el que puede producir un mono con una máquina de escribir: una serie de letras al azar. Sin embargo, la "definición algorítmica de la complejidad" asigna una mayor complejidad a la producción del mono. Por lo tanto, la definición algorítmica de complejidad, si bien ilustra el problema de definición de la complejidad, no encara lo que en realidad estamos buscando.

Algunos científicos, insatisfechos con las definiciones algorítmica y computacional de la complejidad, tanto por esta razón como por el hecho de que no puede aplicárselas de ninguna otra manera para establecer en la práctica la complejidad de un objeto, han propuesto otras definiciones de la complejidad. En 1985 T. Hogg y Bernard Huberman, del Centro de Investigaciones Xerox de Palo Alto, propusieron una *definición física de la complejidad* de un sistema, basada en su *diversidad*. Su medida tiene la virtud de quedar inutilizada tanto para los sistemas completamente ordenados como los totalmente al azar, y de poseer una utilidad máxima para el ámbito intermedio, de conformidad con nuestra visión intuitiva de la complejidad.

Para definir la complejidad, Hogg y Huberman emplean la noción de una jerarquía que "puede corresponder a la disposición estructural de un sistema o, en un sentido más general, al agrupamiento de las partes por la fuerza de la interacción. En particular, si los componentes más fuertemente interactivos se agrupan juntos y este procedimiento se repite con los grupos resultantes, se genera un árbol (similar a un organigrama) que refleja la jerarquía del sistema. En física, se ve este tipo de organización en los *quarks* que forman hadrones, que a su vez forman núcleos, luego átomos, moléculas, y así sucesivamente. De manera análoga, en los procesos de computación se ensamblan subrutinas en programas que forman estructuras de nivel más elevado, como sistemas operativos y redes". Una vez que uno ha definido y establecido dicha jerarquía, es posible asignar una medida a su complejidad, tomando en cuenta la diversidad en las interacciones entre los componentes. Según Hogg y Huberman, ésta "es la característica esencial que permite conductas complejas en sistemas conformados por partes elementales simples".

Utilizando las propiedades matemáticas de las jerarquías, Hogg y Huberman proporcionan una definición precisa de la complejidad que da la sensación de ser la máxima entre orden y caos. La complejidad de una jerarquía completamente ordenada y repetitiva es cero, al igual que la complejidad de una desordenada y caótica. Una rosa es más complicada que un cristal o un gas. Parece, aquí, alcanzarse algún progreso. Sin embargo, a fin de utilizar esta definición de la complejidad debe primero establecerse la jerarquía apropiada, y cómo hacerlo no siempre está tan claro. Tal vez la complejidad surge de definir la jerarquía y no es intrínseca al sistema. Su definición ha sido criticada por algunos científicos como algo artificial.

Otro método para definir la complejidad es el seguido por Charles Bennett, de IBM Research. También él busca una definición de la complejidad por la cual una rosa resulta ser más compleja que un gas de moléculas. En vez de hablar de la complejidad

de un sistema, habla de su "organización"; pero está buscando lo mismo.

Bennett se muestra particularmente sorprendido por la conducta de los sistemas autoorganizados. Se trata de sistemas que obedecen la letra de la segunda ley de la termodinámica (que requiere un sistema físico cerrado para deteriorarse), pero violan su espíritu. Un sistema que se organiza a sí mismo reduce su entropía (una medida de su grado de desorganización) expulsando entropía a su ambiente y, de ese modo, evitando el deterioro. Ejemplo del desarrollo de un sistema autoorganizado es el crecimiento de una planta o un cristal. El aspecto que debe quedar en claro acerca de los sistemas que se organizan a sí mismos es, primero, que ciertamente son complejos, y, segundo, que llegaron a serlo a partir de un sistema mucho más simple. La idea de Bennett sobre la organización o complejidad de un sistema está íntimamente relacionada con la dificultad que hay en pasar del simple sistema inicial al complejo sistema plenamente desarrollado.

Bennett encuadra sus ideas en el marco de la teoría de la información, y lo ilustra del siguiente modo: "El problema de definir la organización es análogo al de definir el valor de un mensaje, por oposición a su contenido de información. Una secuencia característica de arrojar una moneda al aire posee un alto contenido en información pero escaso valor de mensaje; una efemérides astronómica, que da las posiciones de la Luna y los planetas todos los días durante años, no presenta más información que las ecuaciones de movimiento y las condiciones iniciales a partir de las cuales se calculó, pero ahorra a su poseedor el esfuerzo de volver a calcular esas posiciones. El valor de un mensaje, así, no parece residir en su información (sus partes absolutamente imprevisibles), ni en su obvia redundancia (repeticiones texturales, desiguales frecuencia de dígitos), sino más bien en lo que podría denominarse su redundancia oculta: partes previsible sólo con dificultad, elementos que el receptor inicialmente podría haber conjeturado sin que se lo dijeran, pero sólo a un considerable coste en dinero, tiempo o computación. En otras palabras, el valor de un mensaje es la cantidad de trabajo matemático, u otro trabajo plausiblemente efectuado por quien lo origina, cuya repetición se le ahorra al receptor..."

"Estas ideas pueden ser formalizadas en función de la teoría de la información algorítmica: la causa más plausible de un mensaje se identifica con su mínima descripción algorítmica, y su 'profundidad lógica', o contenido plausible de trabajo matemático, se identifica (en términos generales) con el tiempo requerido para computar el mensaje a partir de su descripción mínima."

Bennett identifica la "profundidad lógica" con la complejidad de una entidad física. Implícitamente apela al *enfoque computacional de los procesos físicos*, en que estos últimos se ven como ecua-

ciones de computación especificadas por las leyes de la naturaleza. El sistema solar, desde este punto de vista, puede ser enfocado como un ordenador análogo que resuelve las ecuaciones de Newton. Según ese mismo modelo, podemos estimular la conducta o crecimiento de un sistema físico en un ordenador digital. Podemos empezar con una serie muy elemental de reglas o algoritmos para efectuar dicha computación (la "descripción algorítmica mínima"), como las leyes de Newton para el sistema solar o las reglas de la combinación molecular en el caso de los sistemas vivientes. La "profundidad lógica" de un objeto —su complejidad— se mide por el tiempo que le lleva a un ordenador simular el desarrollo pleno de dicho objeto, a partir del algoritmo elemental y sin tomar ningún atajo. La complejidad, en este sentido, es medida de lo difícil que resulta reunir algo a partir de sus piezas elementales. Por ejemplo, diferentes tipos de rompecabezas en forma de imágenes pueden ser clasificados en función de su complejidad de acuerdo con la dificultad que haya para unir las piezas.

Estos intentos por definir la complejidad en función de la diversidad en una jerarquía o "profundidad lógica" son sumamente interesantes. Sin embargo, supóngase que se encuentra una definición tal de la complejidad. ¿De qué sirve? A menos que la complejidad de un objeto ingrese como cantidad en las leyes físicas, como la temperatura o entropía de un objeto físico, no será muy útil (por lo menos, para los físicos). Ninguna de las actuales propuestas para definir la complejidad de los objetos físicos implica que sea una cantidad que ingrese en las leyes físicas.

Si consideramos el intento por hallar una definición física de la complejidad de un objeto, veremos que hay algo muy extraño al respecto. Imaginemos que alguien logra definir la complejidad para los objetos físicos, definición con la que todo el mundo está de acuerdo. Podremos entonces medir la "complejidad" de un objeto de la manera en que podemos medir su temperatura. Rocas, gallinas y estrellas estarían todas asociadas a cierto grado de "complejidad". No obstante, qué noción extraña sería ésta. Rocas, gallinas y estrellas son todas complejas pero de maneras diferentes. Son *cualitativamente* diferentes. Las rocas están formadas por distintos compuestos y cristales, las gallinas, de células, y las estrellas, de gases conductores de electricidad. Reducir todas estas diferencias esenciales —esencias para cualquier descripción de su complejidad— a un *único* número, sería, aparentemente, simplificar en extremo la situación. Lo interesante acerca de la complejidad de los sistemas físicos reside en sus detalles: de qué modo se los integra. Sería deseable avanzar de estas nociones vagas sobre la complejidad de los objetos físicos hacia algo más preciso. Sin embargo, una definición más precisa tendría que respetar la complicada índole de algunos objetos materiales, y hasta la fecha no se ha postulado una de-

finición tan útil. Mi propia conjetura es que una definición útil de la complejidad de los objetos como propiedad física inherente a ellos seguirá evadiéndonos.

Tal vez, entonces, sea pedir demasiado que la complejidad desempeñe un papel tan directo en las leyes físicas. Si, por el contrario, adoptamos la idea de que la naturaleza es un ordenador gigantesco cuyas operaciones imitamos en nuestras propias simulaciones, podrá entonces ser útil una definición cuantitativa de la complejidad. La noción de complejidad tiene su lugar natural en el mundo de la computación. Siempre que adoptemos el punto de vista computacional, la complejidad podrá entonces corresponderse con algo físico: el tiempo en marcha de la simulación computada de un proceso físico.

Un ejemplo, bien que extremo, de la visión computacional de la naturaleza, es la nueva perspectiva que brinda acerca del crecimiento de un animal. Los procesos de crecimiento de un organismo físico pueden ser vistos como un proceso computacional que calcula el contenido del ADN de ese organismo. Ahora bien: el contenido de información de ADN, hemos advertido, puede codificarse como un número. La complejidad algorítmica de dicho número está especificada por la longitud del algoritmo mínimo. Puedo conjeturar que el proceso computacional del algoritmo mínimo para ADN está representado aproximadamente por el proceso de crecimiento real del organismo correspondiente a la secuencia ADN. Esta conjetura supone que la complejidad algorítmica de ADN (genotipo) y del organismo (fenotipo) son aproximadamente iguales. El desarrollo biológico es, entonces, un algoritmo: los procesos computacionales traducen el genotipo al fenotipo.

El punto de vista computacional del universo físico puede llevarnos a adoptar una extraña perspectiva. Pero hay en ella ese algo extraño que nos abre a una nueva visión. Es de presumir que incluso podríamos descubrir una definición útil de la complejidad dentro de esta perspectiva.

La búsqueda de una definición precisa de la complejidad está estrechamente relacionada con el deseo, por parte de algunos científicos, de cuantificar la noción intuitiva de que, a medida que evolucionan las cosas, parecen tornarse más complejas. Esto sucede a pesar de que la entropía —una medida del desorden— siempre debe aumentar para un sistema físico cerrado (segunda ley de la termodinámica). De alguna manera, la naturaleza es capaz de crear pequeñas islas de orden y complejidad dentro del gran océano de la entropía. La evolución de la vida parece violar el espíritu de la segunda ley aun cuando adhiera a su letra.

Una propiedad de los sistemas dinámicos reside en que parecen dar lugar a sistemas cada vez más complejos. ¿Por qué? Un ser humano es más complejo que un protozoo: no necesariamente

mejor ni más importante, pero ciertamente sí más complejo. Parece ser que “experimentando” con la creación de organismos más complejos, la naturaleza ha encontrado una técnica que permite la evolución en nuevos ambientes. Si todos los nichos ecológicos más simples están ya ocupados por organismos también simples, entonces un organismo más complejo —que no necesite competir por estos nichos simples— podrá evolucionar y sobrevivir. En esto reside, probablemente, parte de la respuesta al interrogante de por qué la evolución ha producido organismos complejos. La adopción de estrategias complejas puede facilitar la supervivencia. Si hubiésemos contado con una definición matemática de la complejidad, esta idea podría entonces ser investigada cuantitativamente, al igual que la evolución cultural y la aparición de sistemas sociales y económicos complejos.

Antes de dejar de lado la complejidad y el azar, desearía mencionar otro intento por atrapar el caos. La definición algorítmica del azar, si bien brinda algunas perspectivas nuevas, no puede, sabemos, decirnos si un número específico se da al azar. Si no podemos decir qué es, *en principio*, el azar, tal vez podamos determinar qué es *en la práctica*. Si los matemáticos no pueden decirnos qué es el azar, entonces tal vez debamos volver al mundo físico para averiguarlo. Allá por la década de 1930 Richard von Mises pensaba que podía definir el azar, por su aparición en los procesos físicos, como una bola que saltaba en la ruleta o una moneda arrojada al aire, en los cuales, si son verdaderamente al azar, nunca se puede ganar o perder en base a los promedios. Este enfoque da a la idea de azar una base práctica.

No hace mucho un grupo de expertos en estadística de la Universidad de Stanford, Persi Diaconis (ex mago profesional), Bradley Efron y Eduardo Engle, examinaron los procesos físicos y llegaron a una definición cuantitativa del caos. También descubrieron que en muchos procesos físicos que podríamos creer azarosos, en realidad no interviene el azar. Por ejemplo, el mezclar los naipes cinco o seis veces, o menos, no significa realmente mezclar al azar la baraja. Sólo tras mezclarlos siete u ocho veces quedan repentinamente dispuestos al azar. Diaconis y su colega Joseph Keller han analizado el rodar de los dados y las vueltas de la ruleta, donde ocurre algo similar. “Si miran todo bien —dice Diaconis—, verán que las cosas no se dan tan al azar como todo el mundo presupone”. Pero como no se dan tan al azar, es posible examinar detalladamente estos procesos físicos y descubrir de qué manera el azar falla. Entonces sí que aprenderemos algo.

Arrojar la moneda al aire es un buen ejemplo. Al arrojarla, posee una velocidad y un giro inicial. Podríamos diagramar la velocidad y el giro inicial de la moneda en un gráfico bidimensional, con la velocidad en el eje horizontal y el giro en el eje vertical. Con la

moneda siempre en la misma posición inicial, digamos, la cara hacia arriba, podemos trazar en el gráfico las zonas que dan cara y las que dan ceca cuando se arroja a moneda. Cerca del comienzo del gráfico, correspondiente a baja velocidad y giro inicial (de modo que la moneda ni siquiera da vueltas), la zona es de cara. Al apartarse de ese origen, hay zonas tanto de cara como de ceca. Al alejarse más, en correspondencia con la alta velocidad y giro inicial, las zonas de cara y ceca se vuelven muy estrechas: un ligero cambio en las condiciones iniciales producirá un resultado diferente. En consecuencia, para estas zonas de elevada velocidad y giro inicial, el proceso de arrojar la moneda se da en gran medida al azar. Se requeriría arrojarla millones de veces para ver que no era así.

Diaconis desarrolló una teoría que le permite cuantificar con precisión cuán al azar se dan realmente algunos de estos procesos físicos. Su teoría también le permite establecer cuál es el grado de caos: cuán lejos se está del verdadero azar. Por medio de su labor y la de otros, comenzamos a vislumbrar algo por detrás del velo del caos físico.

El caos nos ha acompañado largo tiempo. Pero sólo últimamente comenzamos a domeñarlo. Mientras los expertos en estadística proceden con sus métodos para estudiar el caos, se ha dado un importante avance en el campo de la física: los científicos descubrieron el caos en ecuaciones deterministas. Este nuevo descubrimiento se encuadra profundamente con las ideas de complejidad y computabilidad analizadas en el presente capítulo. El caos y la manera de abordarlo, según descubrimos, poseen una interesante estructura que apenas comienza a ser entendida.

Joseph Ford, del Georgia Tech, proclama que esta nueva ciencia del caos es "el comienzo de la tercera revolución en la física de este siglo"; las otras dos revoluciones fueron la teoría de la relatividad y la teoría cuántica. Las exposiciones de Ford sobre el caos son para mí fuente de inspiración, pero no coincido con su evaluación. Las "revoluciones" previas en el campo de la física postulaban nuevas leyes físicas. Por contraposición, toda la labor teórica llevada a cabo en relación con el caos, si bien ilumina profundamente procesos físicos reales y profundiza nuestra comprensión de ellos, no postula ninguna nueva ley física. Analiza, más bien, leyes físicas ya existentes, desde una perspectiva nueva y muy interesante: el caos ya estaba "allí sentado", por así decirlo, en las ecuaciones existentes en el terreno de la física, esperando ser entendidas. En el siguiente capítulo consideraremos el tema.

4

La vida puede ser muy poco lineal

"Los primeros seres humanos percibían... a su mundo como vastamente caótico, ¡y así ocurre con nosotros ahora! Hay, empero, una diferencia. Los hombres de las cavernas creían que la naturaleza arrojaba los dados totalmente al azar, con absoluta indiferencia; los hombres modernos reconocen que los dados de la naturaleza están deliberada aunque ligeramente cargados."

Joseph Ford

Todos hemos oído decir que "todo el mundo habla del tiempo, pero nadie hace nada al respecto". Bueno, pues no es del todo así.

El matemático John von Neumann se puso a reflexionar sobre lo que podía hacerse para controlar el clima. Sabía que su futuro desarrollo podía verse influido por ligeras fluctuaciones en la temperatura, la presión atmosférica y la humedad, y pensó que de poder modificar dichas fluctuaciones, controlándolas eficazmente mientras son todavía pequeñas, llegaríamos a dominar el clima futuro. Por medio de aviones podrían sembrarse nubes el viernes, modificando así las fluctuaciones de manera tal que no lloviera durante el picnic del domingo. Ese era uno de los sueños de von Neumann.

Von Neumann, sin embargo, se equivocaba de plano en relación con la índole de dichas fluctuaciones, pues no es posible controlarlas. Las ecuaciones deterministas que describen el futuro del clima ocultan en sí soluciones que revelan un total caos, y dichas soluciones, en verdad, son las únicas que describen correctamente el clima. Ciertas fluctuaciones infinitesimalmente pequeñas pueden crecer rápidamente, más de lo que podemos prever o controlar, generando así el caos. Una gaviota que sacude sus alas en Cape Cod puede generar una fluctuación que, en principio, podría convertirse en un tifón del Pacífico. Que semejante caos pueda surgir de ecuaciones deterministas es uno de los notables descubrimientos de la moderna física matemática.

Este descubrimiento del *caos determinista* fue efectuado en 1963 por el meteorólogo Edward N. Lorenz en el MIT. Convencido

de que la consabida índole imprevisible del clima debía tener una explicación en función de ecuaciones deterministas, comenzó a buscar dichas ecuaciones. Las ecuaciones que describen el clima son conocidas; pero constituyen una serie infinita y, entonces, son inmanejables. El primer paso de Lorenz consistió en simplificar esas ecuaciones efectuando aproximaciones hasta llegar a tres ecuaciones diferenciales para la manera en que tres cantidades cambiaban en el tiempo. Lo que estas tres cantidades representan no tiene por qué preocuparnos: describen aspectos del clima. No había nada de particularmente insólito en las ecuaciones que Lorenz descubrió, salvo que no eran ecuaciones lineales, lo que significa, sencillamente, que la suma de dos soluciones cualesquiera para ellas *no* constituye en sí una solución. Esta característica no lineal resulta esencial para que se dé el caos determinista.

Cabe agregar aquí unas palabras sobre los términos "lineal" y "no lineal". Estos hacen referencia, sencillamente, a las propiedades de las soluciones para las ecuaciones: el que se pueda o no sumarlas para obtener soluciones nuevas. Si las ecuaciones describen algunos fenómenos naturales o sociales, entonces podemos referirnos a dichos fenómenos como lineales o no lineales, según sea el caso. Por ejemplo, la ecuación sobre el oleaje, que describe el movimiento de una ola de agua, es una ecuación lineal. Admite muchas soluciones diferentes, cada una con una diferente amplitud y una diferente longitud de onda. Pero como se trata de una ecuación lineal podemos sumar esas soluciones a fin de obtener una nueva solución para la ecuación del oleaje. Estas nuevas soluciones sencillamente reflejan el hecho físico de que las ondas reales, como las olas de agua, pueden superponerse entre sí, y todas estas superposiciones son también soluciones a la ecuación lineal de la ola.

La mayoría de las ecuaciones que describen fenómenos en el mundo natural, la conducta humana, la neurofunción, la dinámica poblacional y muchas otras esferas, son ecuaciones no lineales. A pesar de que se trata de fenómenos extremadamente interesantes que desearíamos poder entender, el hecho de que las ecuaciones no lineales suelen ser imposibles de enfocar matemáticamente las vuelve también casi imposibles de resolver. Antes de la aplicación del ordenador, sólo podían analizarse unas pocas características generales de estas ecuaciones no lineales y sus soluciones; en muy contados casos se conocían soluciones exactas. Pero es notable que el tipo de análisis numérico de las ecuaciones efectuadas en ordenadores es, por lo general, indiferente al hecho de que las ecuaciones sean lineales o no lineales: sencillamente, emite soluciones. El advenimiento del ordenador significó que los científicos ya no debían sentirse intimidados por las ecuaciones no lineales. Cuando alguien llegaba a una ecuación no lineal en el propio trabajo, eso ya no significaba "insoluble, deténgase aquí".

La ciencia no lineal es el estudio de fenómenos que requieren ecuaciones no lineales en su lenguaje matemático. La vida no es lineal, ni lo es casi nunca otra cosa que revista algún interés. El dominio humano del régimen no lineal abrirá un nuevo y vasto dominio en la existencia. En este capítulo examinaremos algún ejemplo de dicho dominio. El primero es el descubrimiento del caos determinista por parte de Lorenz.

Lorenz colocó sus ecuaciones no lineales sobre el clima en un ordenador, y éste comenzó a emitir listas de las tres cantidades a medida que pasaba el tiempo. El podía detener el ordenador, examinar las listas de los tres números, escoger una serie intermedia de tres valores y, entonces, poner en marcha el ordenador con esos valores intermedios como datos iniciales. Normalmente cabría esperar que el ordenador imprimiera las mismas listas subsiguientes que antes. Después de todo, eran ecuaciones deterministas, y si los datos iniciales eran los mismos, el desarrollo del sistema en un lapso temporal debería ser idéntico a lo que había sido antes. Por el contrario, sin embargo, los valores de las tres cantidades en las listas iban diferenciándose rápidamente de la emisión original, diferencia que aumentaba al seguirse con la impresión. Lo que Lorenz había descubierto era el caos determinista.

Lo que había ocurrido era que los valores de las tres cantidades no estaban impresos con la plena exactitud de máquina. Por lo tanto, cuando Lorenz inició una segunda pasada en el ordenador con esos valores intermedios como datos iniciales, eran ligeramente distintos de los que el ordenador había aplicado antes. Esa ligera diferencia rápidamente se amplió con el correr del programa (así es como una gaviota sacudiendo sus alas puede provocar un tifón). Esta conducta —sensibilidad extrema ante los datos iniciales— es señal del caos determinista.

Las ecuaciones diferenciales estudiadas por Lorenz, como las ecuaciones de Newton, eran ecuaciones clásicas de la física, y totalmente deterministas. Dada alguna serie de valores iniciales para una cantidad física, las ecuaciones especifican completamente los valores futuros. Por lo general, si se introducen ligeros cambios en la especificación de los valores iniciales, los valores finales sólo se verán ligeramente modificados. Por ejemplo, al disparar un arma de fuego, un ligero cambio en la posición del cañón de la escopeta redundará en un cambio proporcionalmente ligero en la posibilidad de que la bala dé en el blanco. Este comportamiento es típico de la mayoría de las ecuaciones clásicas. La característica de las ecuaciones de Lorenz para el clima, y otras ecuaciones no lineales que revelan un caos determinista, reside en que un ligero cambio en los valores iniciales produce un cambio exponencialmente grande en los valores subsiguientes. A menos que uno conozca los valores iniciales con una precisión que llegue al *infinito* (lo cual es imposible

en la práctica), rápidamente se pierde toda capacidad para predecir los valores futuros: así ocurre con la predicción del tiempo.

Estas ideas sobre determinismo, previsibilidad y caos están profundamente relacionadas con las ideas sobre complejidad algorítmica y computacional introducidas en el capítulo anterior. Con el fin de ver esa relación, debemos entender un par de cosas acerca del determinismo en la física clásica.

La idea del determinismo, que hace al centro conceptual de la física newtoniana clásica, afirma que si conocemos el estado inicial de una partícula —su posición y velocidad—, podemos prever, aplicando las ecuaciones de movimiento, su posterior órbita. Este aspecto del determinismo está bellamente ilustrado por la imagen del matemático francés Pierre Simon de Laplace, quien llegó a imaginar a un demonio que conocía las posiciones y velocidades de cada partícula en el universo. Aplicando las leyes de Newton, el demonio podía entonces conocer el futuro entero del universo, un universo mecánico que funcionaba como un gran reloj.

Al predecir la conducta futura, se destaca la necesidad de conocer las leyes de la física, como las ecuaciones de movimiento. Después de todo, fue el descubrimiento de las leyes del movimiento lo que hizo famoso a Newton y lanzó a la física moderna por el largo camino que conducía hasta el día de hoy. Las condiciones iniciales, que también nos resultan necesarias a fin de introducirnos en las ecuaciones de movimiento para efectuar pronósticos, se dan en un segundo plano. No parecen demasiado importantes; en todo caso, representan algo que no podemos controlar con demasiada precisión. Para muchos problemas de la física clásica, la precisión no es particularmente importante. Por ejemplo, para el movimiento de un péndulo que oscila de atrás para adelante o el movimiento de un planeta alrededor del Sol, la exactitud con que especifiquemos las condiciones iniciales determina, en proporción aproximadamente directa, la precisión con la que llegamos a conocer el consiguiente movimiento.

Si adoptamos el punto de vista computacional de los procesos físicos, podremos visualizar las condiciones iniciales de nuestra partícula en movimiento, representada ahora por una cadena de números, como la entrada (*input*) en una computación orbital. La salida (*output*) es la especificación matemática de la órbita dada por la solución a las ecuaciones de movimiento. Para algunos sistemas, como el péndulo y el planeta que gira alrededor del Sol, una pequeña cantidad de información de entrada redundará en una gran cantidad de información de salida: toda la órbita futura del sistema. Sería como si colocásemos las condiciones iniciales como entrada en nuestro “ordenador”, y luego se nos recompensara con *todas* las futuras posiciones como salida. Estos sistemas “analíticamente solubles” —para los cuales se puede escribir explícitamente

la solución a la ecuación— son deterministas, previsibles, no caóticos. Constituyen la imagen del determinismo newtoniano. Si conocemos el presente en función de las condiciones iniciales, conoceremos el futuro y el pasado, al igual que el demonio de Laplace.

Un sistema dinámico analíticamente soluble puede ser examinado desde el punto de vista de la complejidad algorítmica. Las condiciones iniciales y la solución explícita a las ecuaciones pueden interpretarse como un algoritmo para computar la órbita. La órbita misma puede visualizarse como una serie de números a computar. Como la órbita entera es calculable a partir de un algoritmo bastante simple, no resulta caótica, y los números que la representan no se dan al azar en relación con las condiciones iniciales.

La situación difiere notoriamente en el caso de las ecuaciones no lineales, como las de Lorenz, que tienen soluciones caóticas. Un pequeño error en la especificación de las condiciones iniciales produjo órbitas vastamente distintas. Estas órbitas caóticas visualizadas como un proceso computacional, son descritas del siguiente modo por Joseph Ford: “Nuestra computación orbital requiere tanta información de entrada como la información de salida que brinda. Esto significa que nuestras computaciones han dejado ahora de computar o pronosticar algo, porque los datos orbitales de salida son tan caóticos, tan imprevisiblemente azarosos, que nuestra información de entrada debe, por necesidad, ser equivalente a una copia de la salida... Para sintetizar, una órbita es su propia descripción más sucinta y su propio ordenador más veloz: es a la vez, determinada y al azar.” A partir de esta descripción nos enteramos de que las órbitas no caóticas son lo que se denomina “simulables” (esto es lo que hace un ordenador), en tanto que las órbitas caóticas son “imposibles de simular” (lo único que puede simular al clima es el clima).

La sutileza propia de la naturaleza queda reivindicada. Vemos que, oculto dentro de las ecuaciones deterministas de la física clásica, hay un caos tan completo que incluso el demonio de Laplace no pudo predecir el futuro. Sólo si el demonio conociera las condiciones iniciales con *infinita* precisión y pudiera recordar *infinitos* números al azar (esto presumiblemente requiere un demonio *infinito*), podría predecir el futuro. En este sentido, el demonio tendría que ser idéntico a un universo infinito, que de ningún modo es lo que tenía en mente Laplace.

Cuando Lorenz descubrió el caos determinista, dio con lo que los físicos denominan “extraño factor de atracción”. ¿Qué es ese extraño factor de atracción? Es aquello que atrae una solución para una ecuación, y dicho concepto facilita la clasificación de los sistemas dinámicos, trátase del sistema solar, un grifo que gotea, una red neutral o el clima. A fin de decir con mayor precisión qué es un factor de atracción, describiremos primero la noción abstracta de

un "espacio de estado". Sucede que allí residen los factores de atracción.

Dícese que un sistema dinámico posee un "estado" físico, el cual queda totalmente especificado cuando se especifican los valores de todas las variables físicas independientes para el sistema dinámico. Por ejemplo, un simple péndulo que oscila de atrás para adelante en un plano es descrito por dos variables: la posición del peso colgante y su velocidad. Sistemas dinámicos más complicados pueden requerir muchas variables —incluso un número infinito de ellas— a fin de especificar su estado físico. Una vez que conocemos el estado físico de un sistema, estaremos al tanto de cuanto necesitamos saber acerca de dicho sistema.

A los físicos matemáticos a menudo les resulta extremadamente útil concebir el mundo en términos geométricos, y ese tipo de pensamiento también puede aplicarse a los estados físicos. Podemos imaginar un espacio abstracto denominado espacio de estado (también denominado espacio de fase), el cual nada tiene que ver con el verdadero espacio tridimensional, en el cual las distintas dimensiones corresponden a las variables que describen los sistemas físicos. Por ejemplo, para el simple péndulo, el espacio de estado es bidimensional; una dimensión representa la posición del peso que oscila; la otra, su velocidad. Para un sistema dinámico con tres variables, todavía podemos visualizar el estado del sistema como un punto en un espacio tridimensional. Pero para sistemas dinámicos más complicados, con gran cantidad de variables, necesitamos un número muy grande, tal vez infinito, de dimensiones en el espacio de estado, y ya no podemos visualizar ese espacio. Aun así, la ventaja de pensar en función de un espacio tan abstracto reside en que el preciso estado físico de un sistema, no importa lo complicado que sea o cuántas variables aparezcan, está representado por un único punto en ese espacio de estado multidimensional. Al leer las coordenadas del punto en ese espacio, especificamos los valores de todas las variables físicas, lo cual equivale a especificar el estado del sistema. A medida que el sistema dinámico se modifica en el tiempo, ese punto puede girar en el espacio multidimensional, demostrando con exactitud de qué manera el sistema se modifica con el tiempo. Si las variables físicas nunca se tornan infinitas (caso de todos los sistemas reales), el punto gira dentro de una región circunscrita del espacio de estado.

La razón por la cual nos hemos tomado este trabajo en describir este espacio abstracto de estado estriba en que los elementos o factores de atracción "viven" en ese espacio. Un factor de atracción hace precisamente lo que implica su nombre: atrae el punto que está girando en el espacio. Alrededor de dicho elemento de atracción hay una región del espacio de estado denominada "cuenca de atracción". El punto puede comenzar a girar en cualquier sitio del espa-

cio de estado, reflejando las condiciones de arranque del sistema físico. Pero a la larga, si se encuentra en una cuenca de atracción, se verá inexorablemente atraído hacia el correspondiente elemento de atracción. Un sistema dinámico puede tener uno o más elementos de atracción, y aquél en que finalmente se asienta el sistema depende de la cuenca de atracción en la que arranque.

Hay varios tipos de elementos de atracción conocidos. El más simple es el denominado punto fijo: tras moverse en una cuenca de atracción, el punto del espacio de estado finalmente se detiene en el punto fijo. ¿A qué corresponde esto en el mundo real? Si volvemos a nuestro sencillo péndulo y suponemos su fricción, descubriríamos que a la postre llega a una posición de descanso: el peso que pende queda en una posición fija, y la velocidad de movimiento es cero. En el espacio de estado esto corresponde a un elemento de atracción de punto fijo. Si observamos moverse al punto que representa el estado físico del péndulo, dentro del espacio de estado, a medida que el péndulo se va deteniendo lo veríamos girar en una órbita decreciente hasta quedar detenido en el punto fijo.

Un segundo tipo de elemento de atracción es el denominado *ciclo límite*. Como el nombre lo implica, el punto del espacio de estado, en lugar de llegar a una posición de descanso, sigue girando dentro de un circuito cerrado específico. Esto significa que algunas de las variables físicas efectúan un movimiento periódico. Una vez más, consideremos nuestro péndulo: supongamos que está sujeto a fricción, y que lo sometemos a puntapiés periódicos (tal como ocurre con un metrónomo); descubrimos entonces que no llega a una posición de descanso sino que oscila siempre, reflejando un ciclo dentro de sus límites (ciclo limitado).

El descubrimiento de ciclos límites en sistemas dinámicos no lineales se remonta a Balthasar van der Pol, con su modelado matemático de la acción del corazón humano allá por la década de 1920. Las ecuaciones que describen al corazón no son lineales, y el ritmo cardíaco periódico normal está reflejado como ciclo limitado de estas ecuaciones no lineales. Bajo *shock* o en situaciones de estrés, este ciclo limitado puede ser desmembrado, y el sistema lanzado hacia otro elemento de atracción: un punto fijo; el corazón se detiene, y se produce la muerte.

Los ciclos límites también se dan en las reacciones químicas complejas (descritas asimismo por ecuaciones no lineales), en que las concentraciones de dos o más elementos químicos oscilan de atrás para adelante. Las reacciones químicas metabólicas que se dan en los organismos vivos también pueden oscilar, y se sospecha que sean el origen de los relojes animales. Cada uno de nosotros cuenta por lo menos con uno de esos relojes internos, como puede testimoniarlo todo aquel que haya experimentado el *jeg lag* (cambio de horarios en vuelos de avión). Estos relojes internos pueden cons-

tituir los ciclos limitados de reacciones químicas no lineales en el organismo y el cerebro.

En tanto que el ciclo límite es un simple circuito en el espacio de estado, el siguiente elemento de atracción por grado de complejidad, el de atracción *cuasi periódico*, puede ser visualizado como una interminable línea trazada sobre la superficie de un *torus* (superficie de forma de rosquilla) en el espacio de estado, que da vueltas en círculo en torno del *torus* sobre una suerte de senda helicoidal. El sistema exhibe un movimiento cuasi periódico en el cual prácticamente vuelve al mismo estado inicial, pero no del todo. Tal elemento de atracción se aplica al comportamiento conjunto de dos péndulos acoplados con períodos inconmensurables. Este sistema casi nunca vuelve por completo al mismo estado; de ahí el término "cuasi periódico".

Finalmente, en esta clasificación de los elementos de atracción llegamos al denominado *elemento extraño de atracción*. En este caso, el punto en el espacio de estado gira a lo largo de una senda continua en una región limitada que nunca vuelve al mismo punto partida. (La senda *no* salta de manera caótica, es continua.) La característica crucial de estas extrañas sendas (y lo que las distingue del caso cuasi periódico para el cual tampoco vuelven las sendas) reside en que, si examinamos a dos sendas cercanas en el espacio de estado y las seguimos a lo largo, veremos que rápidamente su rumbo diverge, y que al moverse se van separando cada vez más. Esta conducta refleja la sensibilidad de la solución caótica sobre la elección de datos iniciales. Una diferencia mínima en datos iniciales, que corresponde a sendas cercanas en el espacio, se va ampliando rápidamente. Los otros elementos de atracción no poseen esta propiedad. De ahí que, si conocemos el estado inicial de un sistema (sólo aproximadamente, lo cual es cuanto realmente podemos lograr), ese conocimiento no tendrá valor predictivo cuando hay presente un extraño elemento de atracción, porque la futura órbita depende de manera tan sensible de nuestra elección del estado inicial.

Los elementos de atracción extraños, senda interminable en el espacio de estado abstracto, son objetos geométricos bastante hermosos, que pueden ser construidos por medio de ordenadores y proyectados en una pantalla de video. La senda del factor extraño de atracción en el espacio puede, en su interminable deambular, llenar un subespacio del total, y este subespacio puede poseer una dimensión extravagante de fracción de un número entero. No hay manera de poder construir matemáticamente con exactitud la senda geométrica de tal extraño factores de atracción; no hay ecuaciones que los describan con precisión, como suele ocurrir en el caso de los otros elementos de atracción. La única manera realista de poder construir extraños elementos de atracción y observar qué aspecto

cobran en el espacio es generándolos en ordenadores: así fueron descubiertos inicialmente. Los elementos extraños de atracción son una criatura gestada por el ordenador.

Una manera de imaginar a un elemento extraño de atracción es la descrita por James P. Crutchfield, J. Dooyne Farmer, Normand H. Packart y Robert Shaw en un artículo de *Scientific American*:

El caos mezcla las órbitas (sendas) en el espacio de estado precisamente de la misma manera en que un panadero mezcla la masa del pan con el palo de amasar. Es de imaginar lo que sucede con trayectorias cercanas en un elemento de atracción caótico dejando caer una gota de colorante azul para alimentos en la masa. El acto de amasar es una combinación de dos acciones: extender la masa, en la cual se esparce el colorante, y doblar la masa en dos. Al principio, la gota de colorante simplemente se estira longitudinalmente, pero luego se va doblando y, tras un considerable tiempo, la gota inicial es estirada y vuelta a doblar muchísimas veces. Una inspección detenida muestra que la masa consiste en muchas capas de azul y blanco alternados. Tras sólo 20 pasos la mancha inicial de color ha sido estirada más de un millón de veces su longitud original, y su grosor se ha reducido a nivel molecular. La tintura azul se mezcla totalmente con la masa. El caos funciona de la misma manera, salvo que en lugar de mezclar la masa, mezcla el espacio de estado.

A pesar de que los factores de atracción extraños surgen en innumerables ecuaciones hoy en día, la idea sobre dichos elementos tardó en cobrar forma. En 1944 Lev Landau, físico soviético ganador del Premio Nobel, propuso que el desencadenamiento de la turbulencia en fluidos como un gas o líquido era caracterizado por una infinita secuencia de inestabilidades, cada una de las cuales agregaba una nueva frecuencia al movimiento hasta que se "complicaba y confundía". Podemos ver este desencadenamiento de la turbulencia cuando el flujo laminar del humo que sale de un cigarrillo comienza a girar y retorcerse, o en la transición del agua que fluye suavemente hasta convertirse en agua turbulenta. Sin embargo, el importante trabajo de Landau no identificó al estado turbulento como verdadero estado caótico o total (como lo creemos hoy), sino, más bien, como forma complicada de comportamiento cuasi periódico que imitaba al caos. Por añadidura, a su modo de ver no había un desencadenamiento bien definido de la turbulencia.

En 1963 Lorenz escribió su clásico trabajo titulado "Fluir no periódico determinista", en el que sugería que la turbulencia era realmente no periódica (caótica), en lugar de un movimiento cuasi periódico. Lamentablemente ese importante trabajo, descubrimiento del caos determinista, escapó al conocimiento de los científicos durante más de una década. La distinción entre caos cuasi periódico y no periódico es sutil e importante: dos senderos vecinos en mo-

vimiento cuasi periódico siempre se mantienen cercanos, en tanto que para el movimiento caótico se separan rápidamente.

En 1971 David Ruelle y Floris Takens escribieron un trabajo titulado "Sobre la índole de la turbulencia", en el cual demostraban que, por su mayor parte, el fluir de fluidos produce soluciones caóticas tras unas pocas inestabilidades. Acuñaron, asimismo, el término "elemento extraño de atracción". A continuación, en 1975, Tien Tien Li y James Yorke utilizaron por primera vez el término "caos" para describir las nuevas soluciones erráticas. La verdadera índole del enfoque de la turbulencia y las soluciones caóticas se estaba comprendiendo ahora. De acuerdo con estas investigaciones, a medida que nos aproximamos a la turbulencia, el período del sistema dinámico primero se duplicaría, luego volvería a duplicarse una y otra vez, hasta que en un punto definido se iniciaba el verdadero caos.

Durante el verano de 1975 un amigo, Mitchell Feigenbaum, del Laboratorio de Los Alamos, visitó el Centro Aspen de Física, instituto de investigación de verano. Estuvo examinando la duplicación periódica de cierta ecuación al aproximarse al caos, calculando todo manualmente. Era curioso que emprendiera una tarea de cálculo manual tan laboriosa cuando en Los Alamos, que era su base, contaban con gigantescos ordenadores donde podría efectuar sus cálculos en milésimos de segundo, en lugar de horas. Mitch dijo que lo hizo de la manera más lenta porque le gustaba jugar con números.

Cerca de un mes después Mitch había vuelto a Los Alamos, donde efectuó un cálculo similar con una ecuación diferente. Lo que lo sorprendió fue que, incluso con esta ecuación diferente, *el acercamiento* al caos se caracterizaba por el mismo número que había aparecido en sus cálculos de Aspen. Supo entonces que estaba al borde de descubrir algo. Se dio cuenta prontamente de que el acercamiento al caos se caracterizaba por dos números universales, número tales como π , el radio de la circunferencia en relación con el diámetro de un círculo, que son puramente geométricos y no tienen nada que ver con la dinámica detallada (por eso no importaba la ecuación dinámica que utilizó). De haber utilizado Mitch un enorme ordenador de Los Alamos que le diera un solución rápidamente, habría pasado por alto este importante descubrimiento. Su impulso, que lo llevó a jugar directamente con los números, no era desatinado.

Muchas de sus ideas sobre el caos se dieron de bruces con los conocimientos aceptados acerca de la conducta de los sistemas dinámicos emergentes de la matemática y la física, y algunos de los primeros investigadores que abordaron el caos tuvieron dificultad en hacer que sus colegas aceptaran sus ideas. Esto fue especialmente cierto en el caso del "Grupo colectivo de sistemas dinámicos" en la Universidad de California, Santa Cruz, dirigido por Crutchfield, Farmer, Packard y Shaw. Recuerdo haber visitado su "labora-

torio" en 1981, cuando pensé que la mayor parte de su equipo provenía de la ferretería local. Tuvieron dificultades en convencer a sus colegas de que estaban haciendo algo importante.

El caos definitivamente existe en las ecuaciones de la física clásica. Pero, ¿existe en el mundo real? Recuérdese que Lorenz *aproximó* toda la serie de ecuaciones climáticas a sólo tres ecuaciones que luego dieron muestras de caos. ¿Qué ocurre con toda la serie de ecuaciones? ¿También dan muestras de caos? Todas las ecuaciones, sean referidas al clima, al fluir de un líquido o al corazón humano, entrañan aproximaciones, de modo que no podemos estar seguros de que el caos no haya sido introducido a través de ellas. Por añadidura, la búsqueda del caos en el mundo real se complica por el hecho de que los científicos experimentales no están seguros de que el caos sea realmente intrínseco al sistema dinámico que examinan o debido a algún "ruido" externo azaroso que produce el efecto caótico. Asimismo, como observé antes, resulta difícil distinguir experimentalmente entre el verdadero caos y el complicado movimiento cuasi periódico.

En tanto que otrora se expresaban dichas dudas, la mayoría de los físicos en la actualidad están convencidos de que el caos determinista existe en el mundo real. Los primeros experimentos fueron efectuados por Jerry Gollub, de Haverford College, y Harry Swinney, de la Universidad de Texas, Austin, sobre el flujo Couette circular: el flujo de un fluido entre dos cilindros concéntricos, con el de adentro en rotación. Al aumentar la rotación, el campo de velocidad del fluido contenido se torna periódico, y la periodicidad se duplica hasta que emerge el caos. Los experimentadores enfocaron la transición delicada entre el comportamiento periódico y el caos. Si bien sus resultados fueron altamente sugestivos del verdadero caos, fue difícil distinguir la aparición del caos del caso cuasi periódico.

La primera prueba experimental no ambigua del caos no provino del estudio del fluir de fluidos, sino del estudio de reacciones químicas oscilantes en un experimento de 1980 realizado por J.C. Roux, A. Rossi, S. Rachelart y Christian Vidal. Al supervisar y modificar cuidadosamente las concentraciones de las sustancias químicas reactivas, las oscilaciones químicas realmente perdieron su periodicidad: apareció el caos. Posteriores trabajos experimentales de J.L. Hudson, J. Mankin, Roux y Swinney sobre dichas reacciones demostraron sin lugar a dudas que las oscilaciones irregulares se debían a un extraño factor de atracción.

¿Hay otros tipos de factores de atracción, además de los que hemos examinado? Creemos que sí. Los elementos de atracción son propiedades de ecuaciones no lineales, y dichas ecuaciones, a nuestro modo de ver, describen el mundo real en toda su complejidad. Podemos imaginar ecuaciones tales describiendo la conducta del mercado de valores, la economía internacional, órganos del cuerpo

humano como el corazón y el cerebro, y la conducta humana. Dichos sistemas, puesto que son descritos por ecuaciones no lineales, se ven también sujetos a los diversos elementos de atracción: el punto fijo, el ciclo límite, los ciclos cuasi periódicos, el elemento de atracción extraño, así como otros elementos de atracción que pueden ser combinaciones de estos tipos o algunos que todavía no han sido descubiertos.

Algunas personas incluso han llegado a conjeturar que los elementos de atracción en las ecuaciones no lineales que describen redes neurales pueden representar los estados mentales correspondientes al pensamiento. Los recuerdos podrían corresponder a los ciclos límites. Otros científicos han aplicado fructíferamente estas ideas a muchos campos, como la teoría evolucionista, la evolución molecular, la teoría de la población, la teoría del juego y la conducta animal, incluyendo la busca de alimentos, el combate y la conducta sexual. Las hormigas (particularmente en el comportamiento referido a la busca de alimentos) brindan un ejemplo representativo de la aplicación de modelos matemáticos no lineales a insectos sociales. Se ha demostrado cómo la generación al azar de estrategias de busca de alimentos ayuda a sobrevivir a la colonia, brindándole diversidad y adaptándola a nuevas condiciones en el aprovisionamiento de comida. Un grupo de científicos asociados con el Centro de Estudios no Lineales en Los Alamos y otras instituciones, la "camarilla del caos", tal como se la ha denominado, ha estado organizando encuentros y conferencias que atestiguan las diversas aplicaciones de la dinámica no lineal. Varios encuentros tales han sido realizados bajo el auspicio del Instituto Santa Fe, nuevo centro para el estudio de la complejidad.

Nadie duda hoy de la existencia del caos determinista en las ecuaciones de la física clásica. Este descubrimiento pone fin al ideal de previsibilidad en la física clásica, ideal sostenido por los newtonianos e, incluso en este siglo, por Einstein. Pero hay varios elementos irónicos en este hermoso y nuevo adelanto. El hecho es que el caos posee estructura: la geometría de los extraños elementos de atracción. El caos no es una mezcolanza sin sentido. De hecho, tal vez sea posible detectar las pautas de regularidad estadística en el caos, siempre que se utilice a éste para sondearlas.

La segunda ironía reside en el hecho de que, en tanto la física clásica, por lo general imagen del determinismo, contiene ahora al caos, las ecuaciones de la teoría cuántica (que tienen una interpretación intrínsecamente estadística) hasta el momento no han revelado caos alguno. La ecuación central de la teoría cuántica, ecuación de Schrödinger, está referida a una amplitud de probabilidad. Sin embargo, la ecuación de Schrödinger en sí es una ecuación completamente determinista para la evolución en el tiempo de una probabilidad. El hecho de que las ecuaciones de la teoría cuántica,

tales como la ecuación de Schrödinger, no revelen el caos, resulta muy intrigante para muchos físicos matemáticos, porque las ecuaciones de la teoría cuántica en algunas aproximaciones adecuadas debieran reducirse a las ecuaciones de la física clásica, ecuaciones que sí exhiben caos. Entonces, ¿dónde está el caos en las ecuaciones de la teoría cuántica? Una solución de este importante enigma sin resolver podría brindar una comprensión más profunda de la relación existente entre lo cuántico y el mundo clásico.

El caos, una vez visualizado como algo incontrolable y terrible, se está volviendo más amistoso. Del caos adviene el orden, y de la simplicidad surge la complejidad.

Mientras algunos investigadores estaban descubriendo la estructura del caos en ecuaciones no lineales, otros, unas dos décadas atrás, hallaban nuevas estructuras igualmente notables, imprevistas soluciones ordenadas, denominadas *solitones*. Al igual que el descubrimiento del caos, el descubrimiento de los *solitones* refleja sorprendentes propiedades de las ecuaciones no lineales, propiedades que corresponden a características del mundo real que describen las ecuaciones. Los *solitones* pueden concebirse como ondas solitarias no lineales, protuberancias que pueden retener su forma mientras avanzan en el espacio. La característica no lineal de las interacciones del *solitón* con sí mismo es lo que mantiene la integridad de la protuberancia e impide que se disipe.

Aunque la existencia de ondas no lineales ya era conocida en el siglo XIX, se las consideraba bastante especiales y peculiares, de manera que la esfera de investigación se mantenía en algo así como las aguas estancas de la matemática. El primer indicio reciente de la existencia de *solitones* en los sistemas no lineales se produjo poco después de construirse el ordenador Maniac I en Los Alamos, a comienzos de la década de 1950. Enrico Fermi, J. R. Pasta y Stan Ulam decidieron utilizar a este nuevo ordenador para modelar la conducta de una matriz espacial de sesenta y cuatro partículas conectadas por resortes no lineales. Creían que este sistema, una vez que comenzaba a vibrar en determinado lugar, pronto exhibiría vibraciones al azar de todas las partículas. Por el contrario, descubrieron que el sistema volvía de manera casi periódica a su configuración originaria. Esta conducta imprevista fue uno de los primeros indicios acerca de la existencia de *solitones* que, a modo de pulsos, se movían como ondas a través de la matriz de partículas conectadas por resortes.

En la década de 1960 dos físicos matemáticos, Norman Zabusky y Martin Kruskal, examinaron por primera vez en un ordenador qué ocurriría si a dos *solitones* tales se les permitiera chocar. La mayoría de la gente hubiera creído que se fragmentarían o disiparían, perdiéndose en la nada. Por el contrario, Zabusky y Kruskal descubrieron que los dos *solitones* se atravesaban directa-

mente el uno al otro como si nada hubiera ocurrido. Los *solitones* eran muy robustos.

Actualmente sabemos que los *solitones* exhiben una gran variedad de ecuaciones no lineales que describen procesos físicos. Se los encuentra en ecuaciones que describen el ADN y las proteínas alifáticas, gigantescas olas del océano y complejas interacciones de láser-plasma. Algunos han descubierto conductas parecidas a las de los *solitones* en las ecuaciones que describen redes neurales. A fin de explicar su duración de siglos, los científicos han llegado a sospechar que la gran Mancha Roja de Saturno es un ejemplo de *solitón*. Los monopolos magnéticos, partículas cuánticas que poseen una unidad de carga magnética, son previstos por una variedad de teorías del campo cuántico y constituyen *solitones* (los *monopolos-solitones* fueron analizados en mi libro *Perfect Symmetry*). Los *solitones* como protuberancias estables de energía de campo han sido observados en muchos sistemas dinámicos. Su existencia atestigua la riqueza de la dinámica no lineal.

La dinámica no lineal se encuentra en su infancia. Este descubrimiento del caos determinista y los *solitones* en las ecuaciones no lineales probablemente sea la punta misma del iceberg. Quedan por descubrirse cosas nuevas y maravillosas. El sueño de Descartes, de que el mundo podía ser descrito por la matemática, se está convirtiendo en realidad hoy en día, pero la matemática es en gran medida no lineal. Los científicos apenas comienzan a enfrentar el inmenso desafío de la no linealidad, que seguirá ocupándolos bien entrado el próximo siglo, y más allá. La dinámica no lineal se encuentra en un primer plano de las emergentes ciencias de la complejidad.

Nada de esto hubiera sido posible sin el ordenador. Mientras que el análisis matemático tradicional es, y seguirá siendo, de suma importancia para obtener una profunda visión de la naturaleza de las ecuaciones no lineales, el ordenador ha proveído la motivación para seguir adelante porque puede resolver ecuaciones numéricamente allí donde falla el análisis tradicional. Esto fue previsto por John von Neumann en sus palabras pronunciadas en la Universidad McGill en 1946:

Nuestros actuales métodos analíticos parecen inadecuados para la solución de los importantes problemas que surgen en relación con las ecuaciones diferenciales parciales no lineales y, de hecho, virtualmente con todo tipo de problemas no lineales en la matemática pura... instrumentos de computación de alta velocidad realmente eficaces pueden, en el campo de las ecuaciones diferenciales parciales no lineales así como en muchos otros campos ahora muy difíciles o imposibles de acceder, brindarnos esos indicios heurísticos necesarios en todas las partes de la matemática para alcanzar un auténtico progreso.

Von Neumann, el principal arquitecto del ordenador digital programado, dio la bienvenida al ordenador en la matemática. El se sentía igualmente cómodo en la esfera de la matemática pura o aplicada. Sin embargo, por ese entonces muchos matemáticos, en tanto reconocían la importancia práctica de la matemática aplicada, sentían que la matemática pura debía mantenerse alejada del ordenador. Algunos incluso sienten que el ordenador introdujo una influencia corruptora en los jóvenes matemáticos. Sin embargo, parece extraño que matemáticos puros que estarían dispuestos a aceptar la idea de las pruebas generadas por la máquina de Turing —un ordenador imaginario— se resistan a la idea de una prueba generada por un ordenador real.

La mejor manera de concebir a los ordenadores en el campo de la matemática es como vastas pizarras en las cuales ensayar ideas y efectuar cálculos. Tal vez hace tiempo hubo matemáticos que se resistieron a la introducción de las pizarras y sintieron que había que hacerlo todo en la propia cabeza.

Aunque el movimiento hacia la abstracción en la matemática sigue siendo muy fuerte, el empleo del ordenador refleja una vuelta al enfoque constructivo de la matemática del siglo XIX, enfoque práctico muy alejado de la teoría abstracta, las pruebas de la existencia y demás. El ordenador es el instrumento primario de la nueva disciplina de "matemática experimental".

La matemática experimental suena a contradicción. ¿No se supone que la matemática, aun la aplicada, ha de estar libre de limitaciones empíricas? Por cierto que sí. Sin embargo, hay un papel tan importante como creciente para los experimentos de ordenador en el campo de la matemática. Algunos problemas y ecuaciones matemáticas son tan difíciles y complicados que, a fines de introducirlos en ellos, es esencial el análisis numérico efectuado en un ordenador. Una vez que los matemáticos han adquirido su conocimiento, pueden pasar a formular y demostrar teoremas generales, que es lo que realmente estaban buscando hacer.

La matemática experimental será esencial para la resolución de problemas de la ciencia no lineal. Los especialistas, tanto en matemática aplicada como pura, van a trabajar con científicos de computación y especialistas en las distintas ramas de las ciencias naturales y de la conducta. Esta suerte de trabajo en equipo interdisciplinario es necesario a fines de comenzar a derribar la frontera de la complejidad.

Se están creando nuevas instalaciones para afrontar este desafío. Los científicos de la investigación necesitan acceder a superordenadores, aparatos que pueden manejar enormes volúmenes de datos, sumamente interactivos y con adecuada capacidad gráfica. Dichas instalaciones también permiten al investigador contar con la ayuda de expertos que construyan ordenadores dedicados a

usos especiales: instrumentos construidos a partir del *hardware* existente pero fabricados para resolver un solo problema a velocidad notoria.

En la década de 1930, José Stalin preguntó a uno de sus asesores en qué esfera de la ciencia sobresalía la Unión Soviética. La respuesta que obtuvo (correcta) fue: matemática no lineal y dinámica. Un científico soviético que por ese entonces era una autoridad internacional en esta área se encontraba dictando conferencias en París, mas Stalin lo mandó llamar y estableció, bajo su conducción, un importante instituto para el estudio de problemas no lineales. La Unión Soviética se ha destacado desde entonces en esta importante área, aunque los científicos soviéticos no han aprovechado plenamente el advenimiento del ordenador sino hasta estos últimos tiempos, pues la transmisión de información y los equipos de procesamiento se hallaban bajo estricto control estatal.

En 1985, bajo la conducción de Steven Orszag, de la Universidad de Princeton, y Kenneth Wilson, de la Universidad de Cornell, la Fundación Nacional de Ciencias convino en establecer cinco grandes centros de superordenadores en los Estados Unidos. Con anterioridad, los superordenadores no estaban al alcance de muchos investigadores universitarios. De hecho, algunos investigadores de universidades de los Estados Unidos debían ir a Europa para utilizar los superordenadores que habían sido cedidas a laboratorios europeos por el gobierno norteamericano como favor político. Los científicos norteamericanos en los grandes laboratorios nacionales tenían acceso a superordenadores. "Todos los demás —argüía Wilson— debían hacerse de tiempo cuando podían hallarlo." Esto va a cambiar ahora. Los nuevos centros de superordenadores distribuidos por todos los Estados Unidos pueden ser utilizados por un consorcio de universidades regionales por medio de una conexión directa entre la universidad y el centro. Wilson, actualmente director del Centro de Teoría y Simulación en Ciencias e Ingeniería de la Universidad de Cornell, habla acerca del poder de dichos ordenadores: "...un astrónomo con un telescopio puede observar el universo tal vez a lo largo de cincuenta años, la duración de su carrera científica. Pero un astrofísico con un superordenador puede 'ver' mil millones de años. La simulación por ordenador es, por lo tanto, el experimento de un teórico". Estas instalaciones de superordenadores se convertirán en importantes centros de "matemática experimental" que trabajan en una serie de problemas, la mayoría de ellos en la ciencia no lineal.

En el siguiente capítulo observaremos algunos tipos de problemas en los que va a trabajarse en estas instalaciones y otras similares.

5

Simulando la realidad

"No pierdan la fe. Fortaleza muy poderosa es nuestra matemática."

Stan Ulam

¿Por qué modelamos la realidad y la representamos como mito, metáfora o teoría científica? ¿Por qué no aceptarla como es y dejar que nuestra experiencia sea su propia y mejor simulación? ¿Por qué nuestra mente remodela su propia experiencia en función de los, cuyo significado a menudo nosotros mismos no entendemos?

Sin duda, hay un valor de supervivencia evolutiva de que representemos el mundo en función de mito, metáfora y teoría científica. Evidentemente, somos únicos entre todas las especies por nuestra aptitud simbólica, y ciertamente únicos, también, en nuestra modesta capacidad para controlar las condiciones de nuestra existencia utilizando dichos símbolos. Nuestra capacidad para representar y simular la realidad implica que podemos apropiarnos del orden de la existencia y llevarlo a servir propósitos humanos. Una buena simulación, trátase de mito religioso o de teoría científica, nos da una sensación de dominio sobre nuestra propia experiencia. Representar algo simbólicamente, tal como lo hacemos cuando hablamos o escribimos, está dirigido de algún modo a capturar ese algo, convirtiéndolo en propio. Pero con esta apropiación se toma conciencia de que hemos negado la inmediatez de la realidad y de que, al crear un sustituto, no hemos hecho más que devanar otro hilo en la trama de nuestra grandiosa ilusión.

En el presente capítulo examinaremos una serie de simulaciones de la realidad producidas por las ciencias de la complejidad. Todas estas simulaciones tienen algo en común: se efectúan en un ordenador.

Los modelos realizados con ordenadores se desarrollaron a la par del aparato mismo y constituyen una de sus aplicaciones primarias como instrumento de investigación. Tal como ocurrió con el microscopio y el telescopio en una era previa, el ordenador nos abre una nueva ventana hacia la realidad. ¿O será que, en verdad, crea esa realidad?